TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH

KHOA SƯ PHẠM TOÁN HỌC

HỘI NGHỊ SINH VIÊN NGHIÊN CỨU KHOA HỌC NĂM HỌC 2014-2015

Vinh, 13/04/2015

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU

Thực hiện chỉ thị của Hiệu trưởng Nhà trường về việc tổ chức Hội nghị sinh viên nghiên cứu khoa học cấp khoa và chuẩn bị tham gia Hội nghị tổng kết công tác sinh viên nghiên cứu khoa học năm học 2014-2015 của Trường Đại học Vinh, khoa Sư phạm Toán học tổ chức:

Hội nghị sinh viên nghiên cứu khoa học khoa Sư phạm Toán học
Năm học 2014-2015

Thời gian: 14h00, ngày 13 tháng 4 năm 2015.
Địa điểm: Phòng họp A - Nhà A0, trường Đại học Vinh.

Ban tổ chức hội nghị: PGS.TS. Nguyễn Thành Quang (Trưởng ban), GS.TS. Nguyễn Văn Quảng (Phó ban), TS. Kiều Phương Chi, PGS.TS. Đinh Huy Hoàng, TS. Nguyễn Duy Bình, TS. Nguyễn Thị Hồng Loan, TS. Nguyễn Thị Thế, TS. Phạm Xuân Chung, TS. Nguyễn Quốc Thơ, TS. Đinh Đức Tài, TS. Nguyễn Chiến Thắng, TS. Nguyễn Văn Đức, TS. Thiều Đình Phong, ThS. Đặng Thị Bích Hạnh.

Ban chương trình hội nghị: GS.TS. Nguyễn Văn Quảng (Trưởng ban), TS. Kiều Phương Chi (Phó ban), PGS.TS. Trần Văn Ân, PGS.TS. Đinh Huy Hoàng, TS. Kiều Phương Chi, TS. Nguyễn Duy Bình, TS. Nguyễn Thị Hồng Loan, TS. Phạm Xuân Chung, TS. Nguyễn Thị Thế, TS. Nguyễn Chiến Thắng, TS. Thiều Đình Phong.

Thành phần tham dự hội nghị: Đại diện phòng Quản lý KHTB; Đại diện Đoàn trường; Ban Chủ nhiệm khoa SP Toán, các Thầy Cô giáo hướng dẫn sinh viên có báo cáo khoa học và toàn thể cán bộ khoa SP Toán; Các báo cáo viên; Các sinh viên đạt giải trong kỳ thi Olympic Toán sơ cấp Trường ĐH Vinh, năm học 2014-2015; Đại diện học viên cao học và sinh viên khoa SP Toán.

CHƯƠNG TRÌNH HỘI NGHỊ

1. Khai mạc Hội nghị.

2. Báo cáo tổng kết công tác nghiên cứu khoa học của sinh viên khoa Toán năm học 2014-2015.

3. Công tác khen thưởng.

4. Các sinh viên trình bày báo cáo khoa học.

5. Hội nghị thảo luận.

6. Ban chương trình Hội nghị họp riêng để làm các việc sau:

6.1. Lựa chọn sinh viên tham gia "Hội nghị tổng kết công tác sinh viên nghiên cứu khoa học năm học 2014-2015" của Trường.

6.2. Lựa chọn sinh viên báo cáo tại "Hội nghị tổng kết công tác sinh viên nghiên cứu khoa học năm học 2014-2015" của Trường.

6.3. Đề nghị danh sách sinh viên và tập thể sinh viên để Nhà trường khen thưởng về hoạt động nghiên cứu khoa học năm học 2014-2015.

7. Ban tổ chức thông báo kết quả của phiên họp riêng.

8. Tổng kết và bế mạc Hội nghị.

BÁO CÁO TỔNG KẾT HOẠT ĐỘNG NGHIÊN CỨU KHOA HỌC CỦA SINH VIÊN KHOA SƯ PHẠM TOÁN HỌC NĂM HỌC 2014-2015

Nghiên cứu khoa học (NCKH) là một hoạt động quan trọng trong việc nâng cao chất lượng đào tạo ở các trường Đại học. Hoạt động NCKH của sinh viên là vấn đề cốt yếu trong việc nâng cao chất lượng đào tạo, nhằm tạo ra những cán bộ tương lai có đủ tri thức, năng lực, chủ động sáng tạo và linh hoạt trong giải quyết các vấn đề mà thực tiễn công nghiệp hoá và hiện đại hoá đất nước đòi hỏi.

I. TỔNG KẾT CÔNG TÁC SINH VIÊN NCKH NĂM HỌC 2014 - 2015

1. ĐẶC ĐIỂM TÌNH HÌNH

a. Thuận lợi

Từ nhiều năm nay, hoạt động NCKH của sinh viên khoa Sư phạm Toán đã thực sự trở thành một phong trào thu hút được đông đảo sinh viên tham gia. Ngay từ đầu năm học, hoạt động NCKH của sinh viên đã được Ban Chủ nhiệm khoa cùng với các tổ bộ môn triển khai như: Phân công cán bộ hướng dẫn, động viên các em tham gia NCKH, giới thiệu tài liệu, mời các nhà khoa học báo cáo chuyên đề,... Sinh viên cuối khoá, sinh viên khá giỏi được nhận đề tài sớm để có đủ thời gian chuẩn bị hoàn thành tốt đề tài. Nhiều sinh viên, đặc biệt là các sinh viên đạt kết quả học tập khá, giỏi đã trăn trở, tham khảo thêm tài liệu, học hỏi để tiếp cận được với hoạt động nghiên cứu.

b. Khó khăn

Việc đào tạo theo học chế tín chỉ đã ảnh hưởng không nhỏ tới công tác NCKH của sinh viên. Các tập thể lớp theo hệ thống học phần cũ không còn, nên các em không thường xuyên gặp gỡ nhau để trao đổi làm việc nhóm. Bên cạnh đó, từ năm nay, trường chúng ta đã dừng việc làm khóa luận tốt nghiệp nên một bộ phận lớn các em sinh viên cuối khóa tập trung ôn thi các môn cuối khóa, khó dành nhiều thời gian cho công tác NCKH. Ngoài ra, chúng ta chưa có hệ thống các quy định, các chế độ chính sách khuyến khích, khen thưởng cụ thể để tạo động lực cho SV NCKH và cho các CBGD tham gia công tác hướng dẫn NCKH cho các em sinh viên.

2. NHỮNG KẾT QUẢ ĐẠT ĐƯỢC

Nhờ phát huy vai trò chủ động sáng tạo của sinh viên, với sự quan tâm chỉ đạo của BCN Khoa, cùng với sự dìu dắt nhiệt tình của các Thầy Cô giáo, hoạt động NCKH trong năm học vừa qua của sinh viên đã thu được nhiều kết quả đáng khích lệ. Có thể kể ra một số hoạt động tiêu biểu như:

1. Tổ chức Hội nghị phương pháp học tập

Đây là mô hình đơn giản nhất để sinh viên làm quen với hoạt động học tập và NCKH. Thông qua các báo cáo điển hình về phương pháp học tập các môn chuyên ngành ở Đại học, sinh viên bước đầu làm quen với cách đặt vấn đề, triển khai ý tưởng của bản thân về một đề tài ở bộ môn mà mình yêu thích. Đó chính là môi trường đầu tiên giúp sinh viên tiếp cận với phương pháp NCKH. Trong hội nghị này, các phương pháp và các kết quả NCKH đã được sinh viên đưa ra thảo luận, báo cáo và các em cũng được nghe các thầy cô giáo có nhiều kinh nghiệm trao đổi phương pháp để NCKH có hiệu quả hơn. Qua đó giúp các em tự tin tham gia hoạt động nghiên cứu.

2. Tổ chức cuộc thi Olympic Toán sơ cấp - Năm học 2014-2015

Một hoạt động khác cũng nhằm mục đích làm cho sinh viên ham thích, say mê môn Toán sơ cấp, đó là việc tổ chức các kỳ thi Olympic Toán sơ cấp năm học 2014-2015.

Năm nay, Liên chi đoàn khoa đã tổ chức kỳ thi Olympic Toán sơ cấp thu hút được đông đảo các bạn sinh viên trong khoa và học sinh trường THPT Chuyên tham gia. Kết quả các sinh viên của Khoa SP Toán học đạt giải trong kỳ thi Olympic Toán sơ cấp như sau:

Họ và tên	**Lớp**	**Giải**
Trần Hoài Bảo	54A	Giải Nhất
Nguyễn Tất Khánh	55A1	Giải Nhì
Hồ Hồng Phú	54A	Giải Ba
Nguyễn Thị Hồng Lê	54A	Giải Ba
Lê Bá Dũng	55A2	Giải Ba

3. Tham gia lớp bồi dưỡng cử nhân tài năng

Năm học 2014-2015, khoa Sư phạm Toán học đã tuyển được lớp cử nhân tài năng Toán khóa 9, năm học 2014-2015 bao gồm ... sinh viên của các lớp thuộc khoa Sư phạm Toán học. Trong khóa bồi dưỡng này, các sinh viên được học 5 chuyên đề nâng cao với sự giảng dạy của các giảng viên có nhiều kinh nghiệm, sinh viên lớp bồi dưỡng cử nhân tài năng sẽ được tiếp cận với những vấn đề toán học hiện đại, các hướng nghiên cứu thời sự đang được các nhà toán học trong nước và trên thế giới quan tâm. Đây là năm thứ 9 liên tiếp khoa Sư phạm Toán học thực hiện chương trình bồi dưỡng cử nhân tài năng toán, nhằm nâng cao trình độ cho các sinh viên khá giỏi. Sau khi thi kết thúc các chuyên đề đạt yêu cầu, các sinh viên sẽ được Hiệu trưởng Nhà trường cấp chứng chỉ hoàn thành khóa học bồi dưỡng cử nhân tài năng Toán.

4. Tổ chức các seminar chuyên ngành và các CLB học thuật

Trong năm học vừa qua, việc tổ chức các seminar các môn học chuyên ngành tại các lớp tiếp tục được duy trì và có chất lượng. Không chỉ dừng lại ở các seminar chuyên ngành cho toàn bộ sinh viên do Liên chi đoàn khoa tổ chức, , các chi đoàn cũng đã tự tổ chức nhiều seminar về Toán A1, Toán A2, Xác suất thống kê, seminar các môn học chuyên ngành... cho riêng chi đoàn mình, tiêu biểu như chi đoàn 52A, 54A... Đây là một mô hình cần được chú trọng để nâng cao hiệu quả học tập cũng như NCKH trong sinh viên. Một nét mới trong hoạt động chuyên môn của LCĐ năm nay đó là triển khai CLB dạy học Toán bằng Tiếng Anh, English for Mathematics E4M. CLB là sự phối kết hợp giữ LCĐ và Chi bộ HV-SV. Đến này CLB đã sinh hoạt được 2 buổi và thu hút hơn 50 bạn SV tham gia, tạo một sân chơi trí tuệ bổ ích, nâng cao kỹ năng và trình độ tiếng Anh cho các đoàn viên.

5. Thành lập nhóm SV NCKH của khoa

Được sự quan tâm và chỉ đạo của BCN khoa, LCĐ đã tập hợp các bạn SV có đam mê tìm tòi khám phá các kiến thức Toán chuyên sâu lập thành nhóm SV NCKH. Nhóm bao gồm 36 bạn SV ở tất cả các khóa và tham gia tập dượt NCKH dưới sự hướng dẫn của các nhà khoa học, các thầy cô của 5 Tổ bộ môn. Đây sẽ là một bước tiến mới trong hoạt động SV NCKH của khoa, góp phần tạo ra lực lượng đông đảo các SV tham gia NCKH và tạo nòng cốt cho công tác đào tạo sau đại học trong tương lai của khoa. Các em có thể vào Khoa SP Toán học và học tập liên tục các cấp bậc đào tạo để sau khi ra trường đã là một Tiến sĩ của ngành Toán.

6. Tham gia các Hội nghị, Hội thảo và các đề tài NCKH

Trong năm học vừa qua, học viên sinh viên của khoa còn có cơ hội tham gia vào các buổi sinh hoạt khoa học của khoa Sư phạm Toán, được lắng nghe các báo cáo của các Thầy Cô trong khoa. Những hoạt động này thực sự có ý nghĩa trong việc khuyến khích, động viên học viên sinh viên có thêm tự tin trong việc tập dượt

NCKH, góp phần hình thành tình cảm và nâng cao sự say mê trong công tác học tập và NCKH cho các em.

Cùng với công tác học tập, việc tham gia các đề tài NCKH đang được nhiều sinh viên, đặc biệt là những sinh viên học tập tốt quan tâm. Năm học 2014-2015, toàn khoa có 7 đề tài được chọn tham dự Hội nghị này.

3. TỒN TẠI, HẠN CHẾ

Cùng với nhiều thành tích đã đạt được, hoạt động sinh viên NCKH năm qua vẫn còn hạn chế, sinh viên những năm đầu chưa tham gia nhiều hoạt động NCKH, vẫn còn nhiều bạn sinh viên chưa thực sự say mê trong học tập và nghiên cứu. Các ảnh hưởng mặt trái của cơ chế thị trường vẫn còn ít nhiều tác động đến sinh viên, đã làm cho nhiều sinh viên thiếu nhiệt tình khám phá trong các nghiên cứu cơ bản có ý nghĩa khoa học lâu dài. Việc cập nhật các kiến thức tin học trong sinh viên còn yếu, học tập ngoại ngữ chưa thường xuyên và chưa liên tục, kém hiệu quả, khả năng tự học chưa cao. Sinh viên khai thác tài liệu thư viện và sử dụng công cụ mạng Internet trong học tập và nghiên cứu còn ít.

II. ĐỊNH HƯỚNG CÔNG TÁC SINH VIÊN NCKH NĂM HỌC 2015-2016

Công tác SV NCKH trong năm học 2015-2016 sẽ tập trung vào các điểm chính sau đây:

- Tăng cường hoạt động nhóm SV NCKH của khoa. Tạo ra diễn đàn sôi nổi và tích cực để các thành viên hăng say trong công tác NCKH.
- Khôi phục lại Tập san Toán học và Sinh viên, tạo sân chơi trí tuệ bổ ích cho các em SV yêu toán trong Khoa nói riêng và trong toàn trường.
- Tổ chức các cuộc thi Olympic toán Sinh viên, Olympic toán sơ cấp cấp trường. Thành lập đội tuyển Olympic Toán sinh viên của khoa tham gia kỳ thi Olympic Toán sinh viên toàn quốc 2016.
- Tổ chức các hội nghị học tốt, các seminar khoa học, các CLB học thuật để tạo môi trường khoa học cho các SV tham gia.
- Tiếp tục tuyển chọn và đào tạo khóa sinh viên cử nhân tài năng của khoa.
- Mời các GS Toán học đầu ngành trong nước và cuộc tế về giảng dạy và nói chuyện với CBGD và sinh viên toàn khoa, tạo cơ hội cập nhật tình hình Toán học trong nước và quốc tế, các hướng nghiên cứu các vấn đề Toán học thời sự.

III. ĐỀ XUẤT, KIẾN NGHỊ

Để nâng cao chất lượng NCKH của sinh viên, Ban tổ chức mong rằng tại Hội nghị này, chúng ta sẽ được lắng nghe nhiều ý kiến bổ ích từ các đại biểu, các Thầy Cô giáo và các bạn sinh viên. BTC cũng xin đưa ra một số đề xuất, kiến nghị như sau:

- Mong nhà trường có thêm các chế độ chính sách khuyến khích công tác NCKH hơn nữa để tạo ra động lực lớn cho các GV hướng dẫn và SV tham gia NCKH.
- Tạo điều kiện về cơ sở vật chất để các Seminar, các CLB học thuật hoạt động điều độ và chất lượng.
- Có các chính sách hỗ trợ tài chính cho việc duy trì và xuất bản tập san Toán học và Sinh viên của khoa.

Ban tổ chức Hội nghị bày tỏ lời cảm ơn sâu sắc tới Ban Giám hiệu và các phòng ban chức năng Nhà trường, Đảng bộ và Ban chủ nhiệm khoa Sư phạm Toán học cùng các Thầy Cô giáo đã luôn quan tâm, động viên sinh viên tham gia các hoạt động NCKH.

BAN TỔ CHỨC HỘI NGHỊ

DANH SÁCH SINH VIÊN BÁO CÁO
TẠI HỘI NGHỊ SINH VIÊN NGHIÊN CỨU KHOA HỌC
KHOA SƯ PHẠM TOÁN HỌC, NĂM HỌC 2014-2015

1 Trần Hoài Bảo - 54A Toán
Một phương pháp chỉnh hóa phương trình parabolic ngược thời gian
Người hướng dẫn: TS. Nguyễn Văn Đức

2 Kiều Linh Chi, Nguyễn Phương Anh - 53A Toán
Bước đầu tìm hiểu các chứng minh trong toán học bằng tiếng Anh
Người hướng dẫn: TS. Nguyễn Chiến Thắng

3 Hồ Hồng Phú- Nguyễn Chỉ Dũng, 54A Toán
Một số phương pháp giải toán đa thức và phương trình hàm thi Olympic Toán sinh viên toàn quốc
Người hướng dẫn: ThS. Dương Xuân Giáp, TS. Thiều Đình Phong

4 Sầm Thị Sen (53A Toán), Nguyễn Thanh Huyền (51A Toán)
Một số dạng toán ma trận thi Olympic Toán sinh viên toàn quốc
Người hướng dẫn: TS. Thiều Đình Phong

5 Võ Anh Tú - Trần Hoài Bảo, 54A Toán
Một hướng xây dựng bất đẳng thức tích phân
Người hướng dẫn: ThS. Nguyễn Trần Thuận

6 Bùi Thị Hải Vân - 54A Toán
Một số kĩ thuật giải toán phương trình, hệ phương trình trong các đề thi học sinh giỏi
Người hướng dẫn: TS. Phạm Xuân Chung

MỘT PHƯƠNG PHÁP CHỈNH HÓA PHƯƠNG TRÌNH PARABOLIC NGƯỢC THỜI GIAN

Trần Hoài Bảo - 54A Toán

Người hướng dẫn: TS. Nguyễn Văn Đức

1. Mở đầu

Cho H là một không gian Hilbert với chuẩn $\|\cdot\|$ và $A(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant T)$ là toán tử dương tự liên hợp không bị chặn từ $D(A(t)) \subset H$ vào H. Trong báo cáo này, chúng tôi đề xuất một phương pháp chỉnh hóa phương trình parabolic ngược thời gian với hệ số phụ thuộc thời gian

$$\begin{cases} u_t + A(t)u = 0, \quad 0 < t < T, \\ \|u(T) - f\| \leqslant \varepsilon, \quad f \in H, \varepsilon > 0. \end{cases}$$

Các luật chọn tham số tiên nghiệm và hậu nghiệm cũng được đề xuất kéo theo các đánh giá sai số kiểu Hölder. Các đánh giá sai số này tốt hơn một vài kết qủa trong bài báo [2].

2. Giới thiệu bài toán

Cho H là không gian Hilbert với tích vô hướng $\langle \cdot, \cdot \rangle$ và chuẩn $\|\cdot\|$, $A(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant T) : D(A(t)) \subset H \to H$ là một toán tử dương tự liên hợp không bị chặn. Giả sử f là một phần tử thuộc H và ε là một số thực dương cho trước. Xét bài toán tìm hàm $u : [0, T] \to H$ sao cho

$$\begin{cases} u_t + A(t)u = 0, \quad 0 < t < T, \\ \|u(T) - f\| \leqslant \varepsilon. \end{cases} \tag{1}$$

Bài toán này là bài toán đặt không chỉnh. Do đó, để giải quyết bài toán ta cần đề xuất các phương pháp chỉnh hóa. Trong báo cáo này, chúng tôi đề xuất một phương pháp chỉnh hóa như sau:

Đặt

$$B(t) = \begin{cases} A(-t), \text{ nếu } -T \leqslant t \leqslant 0, \\ A(t), \text{ nếu } 0 < t \leqslant T. \end{cases} \tag{2}$$

Sau đó chúng tôi chỉnh hóa bài toán (1) bằng bài toán

$$\begin{cases} v_t + B(t)v = 0, \; -T < t < T, \\ \alpha v(-T) + v(T) = f. \end{cases} \tag{3}$$

Tương tự như trong bài báo [2], chúng ta giả thiết rằng tồn tại các hằng số k, c và hàm khả tích Riemann $a_1(t)$ trên $[0, T]$ sao cho $a_1(t) \leqslant c, \forall t \in [0, T]$ và

$$-\frac{d}{dt} \langle A(t)u(t), u(t) \rangle \geq 2\|A(t)u\|^2 \\ - a_1(t) \langle (A(t) + k)u(t), u(t) \rangle . \quad (4)$$

Với mọi $t \in [0, T]$, đặt

$$a_2(t) = \exp\left(\int_0^t a_1(\tau)d\tau\right), \; a_3(t) = \int_0^t a_2(\xi)d\xi, \; \nu(t) = \frac{a_3(t)}{a_3(T)}. \quad (5)$$

3. Kết quả chính

Ký hiệu nghiệm của các bài toán (1), (3) lần lượt là $u(t)$, $v(t)$ và $z(t) = u(t) - v(t)$, $\forall t \in [0, T]$. Khi đó ta có các kết qủa sau

Định lý 1. *Bài toán* (3) *là bài toán đặt chỉnh.*

Định lý 2. *Bất đẳng thức sau đây đúng với mọi* $\alpha > 0$

$$2\alpha \left(\|z(0)\| - \frac{E}{2}\right)^2 + \|z(T)\|^2 \leqslant \varepsilon^2 + \frac{\alpha E^2}{2}. \quad (6)$$

Định lý 3. *Nếu* $u(t)$ *là nghiệm của bài toán* (1) *thỏa mãn* $\|u(0)\| \leqslant E$ *và* $v(t)$ *là nghiệm của bài toán* (3) *thì bằng cách chọn* $\alpha = a\left(\frac{\varepsilon}{E}\right)^2$, $(a > 0)$*, ta có đánh giá sau đúng với mọi* $t \in [0, T]$

$$\|u(t) - v(t)\| \leq e^{kt - kT\nu(t)} \sqrt{1 + \frac{a}{2}}^{\nu(t)} \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{a}\right)}\right)^{1-\nu(t)} \varepsilon^{\nu(t)} E^{1-\nu(t)}. \quad (7)$$

Trong trường hợp $a = 1$*, ta có* $\|u(t) - v(t)\| \leq \frac{3}{2} e^{kt - kT\nu(t)} \varepsilon^{\nu(t)} E^{1-\nu(t)}$, $\forall t \in [0, T]$.

Định lý 4. *Giả sử* $\varepsilon < \|f\|$*. Khi đó tồn tại một số thực duy nhất* $\alpha_\varepsilon > 0$ *sao cho*

$$\|v_{\alpha_\varepsilon}(T) - f\| = \varepsilon. \quad (8)$$

Hơn nữa, nếu $u(t)$ *là một nghiệm của bài toán* (1) *thỏa mãn* $\|u(0)\| \leqslant E$ *thì ta có đánh giá*

$$\|u(t) - v_{\alpha_\epsilon}(t)\| \leqslant 2^{\nu(t)} e^{kt - kT\nu(t)} \varepsilon^{\nu(t)} E^{1-\nu(t)}, \; \forall t \in [0, T]. \quad (9)$$

Nhận xét 5. Đánh giá sai số trong các Định lý 3 và Định lý 4 là các đánh giá sai số kiểu Hölder với tốc độ hội tụ có dạng $C\varepsilon^{\nu(t)}$. Tốc độ này tốt hơn một kết qủa đánh giá sai số trong bài báo [2] vì đánh giá sai số trong bài báo [2] có dạng $C\varepsilon^{\nu(t)/2}$ mà $\nu(t) > \nu(t)/2$, $\forall t \in (0, T)$.

4. Kiến nghị, đề xuất

Trong thời gian sắp tới, chúng tôi sẽ tiếp tục nghiên cứu bài toán nói trên để đề xuất thêm các kết qủa mới cho phương pháp chỉnh hóa này.

Tài liệu tham khảo

[1] Agmon S. and Nirenberg L. (1963), *Properties of solutions of ordinary differential equations in Banach spaces*, Comm. Pure Appl. Math., **16**, pp.121–239.

[2] Dinh Nho Hào and Nguyen Van Duc , *Stability results for backward parabolic equations with time dependent coefficients*, Inverse Problems, Vol. **27**(2011), No. **2**, 025003, 20 pp.

[3] Krein S. G. (1957), *On correctness classes for certain boundary problems*, (Russian) Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.), **114**, pp. 1162–1165.

[4] Pazy A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, *Applied Mathematical Sciences 44*, Springer-Verlag.

TIẾP CẬN MỘT SỐ DẠNG TOÁN CHỨNG MINH BẰNG TIẾNG ANH Ở TRƯỜNG PHỔ THÔNG

Kiều Linh Chi - Nguyễn Phương Anh - 53A Toán

Người hướng dẫn: TS. Nguyễn Chiến Thắng

1 Mở đầu

1.1. Tổng quan tình hình nghiên cứu thuộc lĩnh vực đề tài

Trong toán học, mọi kết quả cần phải được chứng minh. Việc chứng minh một kết quả trong toán học tuân theo quy trình: Xuất phát từ các tiền đề đúng rút ra các kết quả bằng suy luận lôgic chặt chẽ. Ở trường phổ thông, phát triển năng lực chứng minh toán học là một yêu cầu cãn bản đối với dạy học môn toán. Ở Việt Nam, nhiều nhà giáo dục toán học đã nghiên cứu, tìm hiểu các phương pháp chứng minh toán học như Hoàng Chúng, Nguyễn Bá Kim, Phạm Vãn Hoàn, Trần Thúc Trình, ... Ở nước ngoài, cũng có nhiều nhà giáo dục toán học nghiên cứu về vấn đề này, chẳng hạn G. Polya, J. Wilson, G. Hanna, M. Villiers, ... Đặc biệt, J. Franklin và A. Daoud trong [3] đã chỉ ra cấu trúc các dạng chứng minh trong toán học.

1.2. Tính cấp thiết của vấn đề nghiên cứu

Hội nhập quốc tế hiện nay là xu thế phát triển của nhiều lĩnh vực và giáo dục cũng không nằm ngoài hướng đi đó. Năm 2015 là năm các nhà lãnh đạo ASEAN quyết định đẩy nhanh việc hiện thực hóa Cộng đồng ASEAN (AC) để cùng đoàn kết đưa khu vực phát triển một cách toàn diện và đồng đều. Điều này mang lại những thuận lợi to lớn cho sự nghiệp phát triển của đất nước, bên cạnh đó cũng đặt ra những thách thức không nhỏ với một nền kinh tế - xã hội đang phát triển. Cụ thể, với giáo dục đặt ra một nhiệm vụ hàng đầu là đào tạo được đội ngũ nhân lực hùng hậu và có khả năng hội nhập tốt. Yêu cầu của xã hội với người giáo viên ngày càng cao hõn. Việc dạy học các môn tự nhiên nói chung, hay môn toán nói riêng bằng tiếng Anh là một trong những đòi hỏi cụ thể từ yêu cầu ấy. Ở Việt Nam, dạy học Toán bằng tiếng Anh là một lĩnh vực nghiên cứu mới. Các kết quả đã có chủ yếu là các quyển sách song ngữ về các chủ đề toán phổ thông, chưa có một nghiên cứu nào thực sự sâu sắc về vấn đề này. Chính vì vậy, chúng tôi đã lựa chọn đề tài: *Tiếp cận một số dạng toán chứng minh bằng tiếng Anh ở trường phổ thông*.

1.3. Mục tiêu

Chỉ ra một số dạng toán chứng minh được phát biểu bằng tiếng Anh, những cấu trúc cơ bản thường dùng trong một bài chứng minh bằng tiếng Anh, đưa ra các ví dụ tương ứng phù hợp với chương trình toán phổ thông của Việt Nam, qua đó tăng cường khả năng tư duy Toán học cũng như vốn ngoại ngữ của bản thân.

1.4. Phương pháp nghiên cứu

Chủ yếu là phương pháp nghiên cứu lư luận, bao gồm nghiên cứu, tìm hiểu tài liệu liên quan đến các dạng toán chứng minh bằng tiếng Việt và tiếng Anh từ các nguồn khác nhau.

1.5. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

- Đối tượng nghiên cứu là các dạng toán chứng minh được phát biểu bằng tiếng Anh.
- Phạm vi nghiên cứu là môn toán ở trường phổ thông.

2 Nội dung nghiên cứu và các kết quả nghiên cứu đạt được

Trong chương trình toán học nói chung, toán học phổ thông nói riêng, việc chứng minh một tính chất, một định lư, một hệ quả...hay nói tổng quát chứng minh một mệnh đề là kỹ năng thiết yếu trong việc dạy học một nội dung nào đó. Trong toán học, một chứng minh là một cách trình bày thuyết phục (sử dụng một hệ thống các tiên đề, các tính chất đã được chứng minh từ trước và các phép suy luận có lư) rằng một phát biểu toán học là đúng đắn. Chứng minh có được từ lập luận suy diễn, chứ không phải là tranh luận kiểu dự đoán hoặc theo kinh nghiệm. Có nghĩa là, một chứng minh phải biểu diễn cho thấy một phát biểu là đúng với mọi trường hợp, không có ngoại lệ.

Một bài chứng minh thường là một đoạn văn, bởi vậy nó cũng có những yêu cầu cơ bản về cấu trúc như gồm câu mở đầu, phần thân đoạn và câu kết thúc. Trong đó, câu mở đầu chính là câu đặt vấn đề về đối tượng cần chứng minh (*the topic sentence*), phần thân đoạn (*the body*) gồm các thao tác chứng minh, trong mỗi thao tác, ta nên nói rõ ta thực hiện thao tác đó với mục đích gì để khi trình bày bài giải một cách khoa học và có hệ thống, đồng thời cũng có thể giúp người đọc dễ dàng hiểu được nội dung, câu kết thúc (*the concluding sentence*) thông báo cho ta biết việc chứng minh đã hoàn thành và đưa ra câu trả lời cuối cùng cho bài toán. Các dấu hiệu kết thúc có thể là: *therefore, in conclusion, finally, it now can conclude that, ...*

Trong bài nghiên cứu này, chúng tôi tập trung vào cách chứng minh ba loại mệnh đề toán học cơ bản bằng tiếng Anh sau đây:

(i) "All" statement (mệnh đề "Với mọi")

(ii) "If and only if" statement (mệnh đề "Khi và chỉ khi")

(iii) "Some"statement (mệnh đề "Tồn tại")

Ở mức độ tiếp cận ban đầu, để chứng minh một mệnh đề toán học bằng tiếng Anh, điều đầu tiên là chúng ta phải trình bày được bằng tiếng Việt, nhưng không có nghĩa khi trình bày bằng tiếng Anh, chúng ta dịch lại từng câu chữ trong bài chứng minh đó. Văn phong của tiếng Anh và tiếng Việt không giống nhau. Câu cú trong chứng minh tiếng Việt bài bản và đa dạng về hình thức từ ngữ, còn ngôn ngữ Toán học trong tiếng Anh rất rõ ràng, trong sáng và tương đối đõn giản. Người học hoàn toàn có thể trình bày bằng tiếng Anh nếu có vốn từ vựng cơ bản dùng trong các bài toán chứng minh.

2.1 "All" statement

2.1.1. Dạng mệnh đề này có cấu trúc chung như sau:

All As are Bs.

Có nghĩa là mọi A đều là B. A, B ở đây có thể là một đối tượng, một tính chất nào đó. Cấu trúc trên cũng tương đương với một số cách diễn đạt khác như:

"Any A is a B" (*Bất kỳ A nào cũng là B*)

"Every A is a B" (*Mỗi A là một B*)

"If anything is an A, then it is a B" (*Nếu một đối tượng nào đó là A thì nó cũng là B*).

Khi chứng minh dạng mệnh đề này bằng tiếng Anh, cần phân biệt được vai trò của A và B. Về mặt lôgic toán học, A là giả thiết, là cái đã có (Supposition), B là kết luận, cái cần chứng minh (Conclusion). Còn về mặt ngữ pháp, A là chủ ngữ (Subject), B là tân ngữ (Object). Ta cần phân biệt để có những suy luận hợp lư, đúng hướng, tránh sau nhiều bước lập luận lại quay về cái ban đầu. Ta cần chứng minh mọi A thì đều là B nên phương pháp thường là chỉ ra một đối tượng bất kỳ mà thỏa mãn A thì cũng thỏa mãn B. Do đó, cấu trúc của bài chứng minh thường như sau:

Let x be an A

Therefore, x is a B.

2.1.2. Ví dụ

<u>Example 1</u>: Prove that for the product of three successive integers is divisible by 3.

<u>Proof:</u> Let M be the product of three successive integers. So, we have to prove that: $M = x.(x-1).(x-2) \vdots 3$ with x $\in \mathbb{Z}$ = $A \cup B \cup C$, where $A = \{x = 3k, k \in \mathbb{Z}\}$ $B = \{x = 3k+1, k\mathbb{Z}\}$ $C = \{x = 3k+2, k \in \mathbb{Z}\}$ We have: $\forall\, x \in A,\ \ M = 3k.(3k-1).(3k-2) \vdots 3$ $\forall\, x \in B,\ \ M = (3k+1).3k.(3k-1) \vdots 3$ $\forall\, x \in C,\ \ M = (3k+2).(3k+1).3k \vdots 3$ Therefore, $\forall\, x \in\ \mathbb{Z} = A \cup B \cup C$, $M = x.(x-1).(x-2) \vdots 3$.	**<u>Chứng minh:</u>** Gọi M là tích của 3 số nguyên liên tiếp bất kỳ. Khi đó, $M = x.(x-1).(x-2), \forall\, x \in \mathbb{Z}$ Ta cần chứng minh M $\vdots$3. Ta có: $\mathbb{Z} = A \cup B \cup C$ với $A = \{x = 3k, k \in \mathbb{Z}\}$ $B = \{x = 3k+1, k \in \mathbb{Z}\}$ $C = \{x = 3k+2, k \in \mathbb{Z}\}$ Khi đó: $\forall\, x \in A,\ \ M = 3k.(3k-1).(3k-2) \vdots 3$ $\forall\, x \in B,\ \ M = (3k+1).3k.(3k-1) \vdots 3$ $\forall\, x \in C,\ \ M = (3k+2).(3k+1).3k \vdots 3$ Suy ra $\forall\, x \in \mathbb{Z} = A \cup B \cup C$, $M = x.(x-1).(x-2) \vdots 3$.

<u>Example 2</u>: Prove that every odd integer is congruent to 1 or to 3 modulo 4?

<u>Proof:</u> Let n be an odd integer, so we can write $n = 2m+1, m \in \mathbb{Z}$. We now have two cases: * Case 1: m is even. Then, m can be written as $2k$ ($k \in \mathbb{Z}$). So, $n = 2(2k)+1\ = 4n+1$ $\Rightarrow \mathbf{n} \equiv \mathbf{1}(\mathbf{m}od\ \mathbf{4})$ * Case 2: m is odd. Then, m can be written as $2k+1(k \in \mathbb{Z})$.So, n = 2(2k + 1) + 1 = 4k + 2 + 1 = 4k + 3 => $\mathbf{n} \equiv \mathbf{3}(\mathbf{m}od\ \mathbf{4})$ Therefore, for every odd integer n, $\mathbf{n} \equiv \mathbf{1}\ (\mathbf{m}od\ \mathbf{4})$ or $\mathbf{n} \equiv \mathbf{3}\ (\mathbf{m}od\ \mathbf{4})$.	**<u>Chứng minh:</u>** Gọi n là một số nguyên lẻ bất kì. Khi đó ta có $n = 2m+1, m \in \mathbb{Z}.$ Ta xét hai trường hợp sau: Trường hợp 1: m chẵn. Khi đó $m = 2k, (k \in \mathbb{Z})$. n = 2(2k) + 1 = 4n + 1 $\equiv$ 1(mod 4) (1) Trường hợp 2: m lẻ. Khi đó $m = 2k+1(k \in \mathbb{Z})$. n = 2(2k + 1) + 1 = 4k + 2 + 1 = 4k + 3 $\equiv$ 3(mod 4) (2) Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

2.2 "If and only if" statement

2.2.1. Dạng phát biểu này có cấu trúc chung như sau:

"Something is A if and only if it is B".

Có nghĩa là một đối tượng nào đó là A nếu và chỉ nếu nó là B. Trong tiếng anh mệnh đề này đôi khi được viết tắt là 'iff' và nó thường được kí hiệu bởi dấu:

Mệnh đề cũng có thể được diễn đạt như sau:

"All As are Bs and all Bs are As". (*Mọi A là B đồng thời mọi B cũng là A*)

"Being an A is a necessary and sufficient condition for being a B". (*A là điều kiện cần và đủ để có B*).

Điều này là đúng tương đương với 2 khẳng định sau đây là đúng:

Nếu một đối tượng nào đó là A thì cũng là B.

Và

Nếu một đối tượng nào đó là B thì cũng là A.

Do đó khi viết một chứng minh cho dạng mệnh đề này ta cần phải viết hai chứng minh, mỗi chứng minh cho mỗi khẳng định trên. Cụ thể, ta chứng minh như sau: bắt đầu giả thiết rằng mệnh đề A đúng rồi tiến hành chứng minh để suy ra mệnh đề B đúng, và ngược lại, giả thiết mệnh đề B đúng để suy ra mệnh đề A đúng. Cấu trúc của chứng minh trong tiếng Anh có thể như sau:

Let x be an A

Therefore, x is a B.

Let y be B

Therefore, y is an A.

So, something is an A if and only if it is a B.

2.2.2. Ví dụ

<u>Example 1</u>: Proof the integer n is odd if and only if n^2 is odd.

<u>Proof:</u> First we show that n being odd implies that n^2 is odd. Let n be odd. Then, we can write $n = 2a + 1$ for some integer a. Thus, $n^2 = (2a + 1)^2 = 4a^2 + 4a + 1$ $= 2(2a^2 + 2) + 1$. This expresses n^2 as twice an integer, plus 1, so n^2 is odd.	**<u>Chứng minh:</u>** Đầu tiên, chúng ta cho thấy rằng n là lẻ thì có nghĩa n^2 cũng là lẻ. Giả sử n là lẻ. Khi đó, theo định nghĩa của một số lẻ, $n = 2a+1$ với một số nguyên a nào đó. Do đó: $n^2 = (2a+1)^2 = 4a^2 + 4a + 1$ $= 2(2a^2+2) +1$ Điều này cho thấy n^2 là 2 lần của một số nguyên cộng với 1, do đó n^2 là số lẻ.

- Conversely, let n^2 be odd, we need to prove that n being odd. We use proof by contradiction. Suppose n is not odd. Then n is even, so $n = 2a$ for some integer a. Thus, $n^2 = (2a)^2 = 2.(2a^2)$ so n^2 is even because it's twice an integer. It contradicts the hypothesis n^2 is odd. Therefore, the integer n is odd if and only if n^2 is odd.	- Ngược lại, chúng ta cần chứng minh nếu n^2 lẻ thì có nghĩa n lẻ. Chúng ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử n không phải là lẻ. Vậy n là số chẵn, nên $n = 2a$ với a là số nguyên. Do đó, $n^2 = (2a)^2 = 2.(2a^2)$ nên n^2là số chẵn. Điều này trái với giả thiết n^2 là lẻ đã nêu. Như vậy, số nguyên n là lẻ nếu và chỉ nếu n^2 là lẻ.

Trong chứng minh các phát biểu *"if and only if"*, sau khi đã chứng minh từ P => Q, trước khi đưa ra những chứng minh từ Q => P ta nên bắt đầu đoạn văn với chữ "Conversely" (ngược lại) để nhắc nhở người đọc rằng bạn đã hoàn thành phần đầu tiên của chứng minh và đang chuyển sang phần thứ 2. Đó là cách trình bày tốt để người đọc có thể đọc chính xác những gì đoạn văn đã chứng minh.

<u>Example 2</u>: Suppose a and b are integers. Prove that a $\equiv$ b (mod 6) if and only if a $\equiv$ b (mod 2) and a $\equiv$ b (mod 3).

<u>Proof:</u> - Firstly, we prove that if a $\equiv$ b (mod 6), then a $\equiv$ b (mod 2) and a $\equiv$ b (mod 3). Indeed, since a $\equiv$ b (mod 6), then there is an integer n for which a - b = 6n. a - b = 2.(3n) which implies 2 $\mid$ (a - b), so a $\equiv$ b (mod 2). But we also get a - b = 3.(2n), which implies 3 $\mid$ (a - b), so a $\equiv$ b (mod 3). Hence, a $\equiv$ b (mod 2) and a $\equiv$ b (mod 3).	**<u>Chứng minh:</u>** -Đầu tiên, chúng ta chứng minh rằng nếu a $\equiv$ b (mod 6) thì a $\equiv$ b (mod 2) và a $\equiv$ b (mod 3). Giả sử a $\equiv$ b (mod 6), nên có số nguyên n sao cho: a – b = 6n a – b = 2.(3n) Do đó 2 $\mid$ (a – b), hay a $\equiv$ b (mod 2). Mà, a – b = 3.(2n) hay 3 $\mid$ (a – b), nên a $\equiv$ b (mod 3). Như vậy a $\equiv$ b (mod 2) và a $\equiv$ b (mod 3).

- Conversely, suppose that a ≡ b (mod 2) and a ≡ b (mod 3). We prove that a ≡ b (mod 6). Since a ≡ b (mod 2), we get 2 |(a - b), so there is an integer k for which a - b = 2k. Hence, a - b is even. Also, from a ≡ b (mod 3), we get 3 |(a - b), so there is an integer t for which a – b = 3t. But since we know a - b is even, it follows that t must be even also, for if it were odd then a - b= 3t would be odd. Hence t = 2m for some integer m. Thus a - b = 3t = 3.2m = 6m. This means 6 |(a - b), so a ≡ b (mod 6).	- Ngược lại, giả sử a ≡ b (mod 2) và a ≡ b (mod 3) ta chứng minh a ≡ b (mod 6). Từ a ≡ b (mod 2) ta có 2 |(a - b), nên có một số nguyên k sao cho a - b = 2k hay a – b là số chẵn. Mặt khác, từ a ≡ b (mod 3) ta có 3 |(a - b), nên có số nguyên t sao cho: a - b = 3t Nhưng a - b là một số chẵn, suy ra t cũng phải là một số chẵn vì nếu t là số lẻ thì a - b = 3t sẽ là một số lẻ. Vì thế, t = 2m với m là số nguyên nào đó. Như vậy, a - b = 3t = 3.2m = 6m. Điều này có nghĩa là 6 |(a - b), hay a ≡ b (mod 6).

2.3 "Some" statement

2.3.1. Cấu trúc chung của dạng mệnh đề này như sau:

"Some As are Bs" or **"Some A is a B"**

Mệnh đề "Some" là những phát biểu nói về một sự tồn tại tổng quát, có nghĩa là tồn tại một đối tượng nào đó thỏa mãn điều kiện cho trước.

Nó còn có các hình thức phát biểu thay thế khác như:

"Something is both an A and a B." (*Đối tượng nào đó là cả A và B*).

"There exists something that is both an A and a B." (*Tồn tại đối tượng nào đó là cả A và B*).

"There is an A that is also a B." (*Có một đối tượng là A và cũng là B*).

"There is at least one A that is a B." (*Có ít nhất một đối tượng A là B*).

Đối với loại mệnh đề này, không có một cấu trúc chứng minh chung cụ thể bởi vì việc chứng minh sự tồn tại của một đối tượng nào đó mà không chỉ rõ nó ra thì khó có thể thực hiện và thuyết phục được. Bởi vậy, ta cần chỉ ra có ít nhất một đối tượng cụ thể A là B trong mỗi bài toán thuộc loại mệnh đề này.

2.3.2. Ví dụ

Example 1: Show that there is solutions of $x^{100} + 5x - 2 = 0$ between $x = 0$ and $x = 1$.

<u>Proof:</u> Let f(x) = x^{100} + 5x – 2. We have f(0) = -2 which is negative. While, f(11) = 4 which is posotive. So the graph of f(x) must cross the x-axis somewhere between 0 and 1; that is, there is a solution of f(x) = 0 somewhere between 0 and 1.	**<u>Chứng minh:</u>** Đặt f(x) = x^{100} + 5x – 2 Ta có f(0) = -2 là một giá trị âm. Trong khi đó, f(11) = 4 là một giá trị dương. Vì vậy đồ thị của f(x) phải đi qua điểm nào đó trên trục x nằm giữa 0 và 1; điều đó có nghĩa là có một giá trị f(x) = 0 nằm ở đâu đó giữa 0 và 1.

<u>Example 2</u>: Show that the curve $x^2 + xy + y^2 = 1$ has an axis of symmetry.

<u>Proof:</u> There exists a line y = x that is an axis of symmetry, since if (x, y) lies on the curve, then, x^2 + xy + y^2 = 1 thus, y^2 + yx + x^2 = 1 so the point (y, x) also lies on the curve; this is the point opposite (x, y) across the line y = x.	**<u>Chứng minh:</u>** Chúng ta có đường thẳng y = x là một trục đối xứng, vì nếu điểm (x, y) nằm trên đường cong đó thì x^2 + xy + y^2 = 1 suy ra, y^2 + yx + x^2 = 1 nên điểm (y, x) cũng nằm trên đường cong, và đây chính là điểm đối xứng với (x, y) qua đường thẳng y = x.

<u>Example 3</u>: Show that there exist x, y are integers such that $x.y - x - y = 2$.

<u>Proof:</u> We have that: x.y – x – y = 2 x.(y – 1) – y = 2 x.(y – 1) – (y – 1) = 3 (x – 1).(y – 1) = 3 Since x, y are integers so x – 1 and y – 1 are integers and they are submultiples of 3. Therefore, we have the following cases: $\begin{cases} x-1=3 \\ y-1=1 \end{cases}$; $\begin{cases} x-1=1 \\ y-1=3 \end{cases}$ $\begin{cases} x-1=-1 \\ y-1=-3 \end{cases}$; $\begin{cases} x-1=-3 \\ y-1=-1 \end{cases}$ Solving, we find: (x, y) = (4, 2); (2, 4); (0, -2); (-2, 0). Hence, there exists 4 solutions of the above equation.	**<u>Chứng minh:</u>** Ta có: x.y – x – y = 2 x.(y – 1) – y = 2 x.(y – 1) – (y – 1) = 3 (x – 1).(y – 1) = 3 Do x, y là các số nguyên nên x – 1 và y – 1 cũng là các số nguyên và chúng đều là ước của 3. Suy ra ta có các trường hợp sau: $\begin{cases} x-1=3 \\ y-1=1 \end{cases}$; $\begin{cases} x-1=1 \\ y-1=3 \end{cases}$ $\begin{cases} x-1=-1 \\ y-1=-3 \end{cases}$; $\begin{cases} x-1=-3 \\ y-1=-1 \end{cases}$ Giải các hệ này ra ta được các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn là: (4, 2); (2, 4); (0, -2); (-2, 0).

3. Kết luận và kiến nghị

Qua những nội dung đã được trình bày ở trên,chúng ta có thể thấy rằng việc trình bày một bài toán bằng tiếng Anh là điều hoàn toàn không khó khăn như chúng ta nghĩ. Ngôn ngữ có thể khác nhau nhưng tri thức là cái chung, cách thức tư duy lôgic trong chứng minh thì hoàn toàn tương tự nhau. Khi gặp bài toán chứng minh một mệnh đề bằng tiếng Anh, không chỉ đối với 3 kiểu mệnh đề nói trên ("All" statement, "If and only if" statement, "Some" statement), ta cần xác định được đâu là giả thiết, đâu là kết luận và xác định được các thao tác chứng minh cần thiết và diễn đạt các thao tác đó bằng tiếng Anh. Ta thấy rằng, các cấu trúc câu và cấu trúc trình bày một bài toán chứng minh bằng tiếng Anh thường khá đõn giản với hoàn toàn có thể áp dụng cho nhiều trường hợp tương tự. Bởi vậy, chúng ta chỉ cần trang bị không quá nhiều kiến thức ngữ pháp và chỉ cần một vốn từ vựng chuyên ngành cơ bản là hoàn toàn có thể thực hiện được.

Đối với sinh viên sư phạm chúng ta, việc dạy học bằng tiếng Anh là một trong những yêu cầu thiết thực nhất về trình độ chuyên môn. Khó khăn lớn nhất của chúng ta là vốn tiếng Anh hạn chế và môi trường thực hành còn hạn hẹp. Bởi vậy, tự bản thân mỗi người cần tự giác rèn luyện và thành lập những hội nhóm để tự hoàn thiện kiến thức, kỹ năng đồng thời tích lũy kinh nghiệm, rèn luyện tự tin, để tiếng Anh không còn là "sở đoản" mà trở thành thế mạnh góp phần xây dựng, củng cố chất lượng đội ngũ giáo viên nói riêng và chất lượng toàn ngành giáo dục nói chung, phù hợp với xu thế hội nhập phát triển của thời đại.

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Thành Quang, *Bài giảng Số học (dành cho sinh viên ngành Sư phạm Toán học)*, Trường Đại học Vinh.

[2] Chu Trọng Thanh, *Bài giảng Lô-gic Toán và Toán rời rạc (dành cho sinh viên ngành Sư phạm Toán học)*, Trường Đại học Vinh.

[3] Trang web: http://web.maths.unsw.edu.au/~jim/proofs.html.

[4] Trang web: http://www.cut-the-knot.org/proofs/.

[5] File pdf: http://www.cimt.plymouth.ac.uk/projects/mepres/allgcse/unitpbk.pdf.

Điện thoại liên hệ: 0966 046 912.

Địa chỉ email: klchi.dhv@gmail.com.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN ĐA THỨC VÀ PHƯƠNG TRÌNH HÀM THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN TOÀN QUỐC

Hồ Hồng Phú, Nguyễn Chỉ Dũng - 54A Toán

Người hướng dẫn: ThS. Dương Xuân Giáp

TS. Thiều Đình Phong

1. Mở đầu

Kỳ thi Olympic Toán sinh viên toàn quốc là ngày hội đông đảo của sinh viên và giáo viên các trường các học viện. Mục tiêu chính của kỳ thi olympic sinh viên là tạo ra cuộc hội ngộ tranh tài trí tuệ giữa các sinh viên yêu thích toán học của các trường đại học và cao đẳng để chấp cánh cho ước mơ cho những hoài bão trở thành nhà toán học sau này. Ngoài ra còn là nơi gặp gỡ tăng cường hiểu biết những người yêu thích nghiên cứu toán học để thắp lên ngọn lửa đam mê toán học. Trong báo cáo này chúng tôi trình bày một số phương pháp giải các bài toán về đa thức và phương trình hàm trong các kỳ thi Olympic Toán sinh viên toàn quốc.

2. Một số phương pháp

2.1 Phương pháp sử dụng tính chất nghiệm của đa thức

Cho đa thức một biến, hệ số thực $P(x)$. Khi đó nếu x_0 là nghiệm của $P(x)$ thì $P(x) = (x - x_0)Q(x)$, trong đó $\deg P(x) = \deg Q(x) + 1$.

Với bài toán yêu cầu tìm đa thức $P(x)$, ta dựa vào giả thiết đã cho tìm được một số nghiệm nó, giả sử là $a_1, a_2, ..., a_k$. Khi đó

$$P(x) = (x - a_1)(x - a_2)...(x - a_k)G(x)$$

Trong đó $\deg P(x) \ = \deg G(x) + k$. Thay $P(x)$ vào điều kiện bài toán ban đầu ta tìm được $Q(x)$ và suy ra đa thức $P(x)$ cần tìm.

Ví dụ 1. (Đề thi Olympic SV 2010). Cho $a, b \in \mathbb{R}^+$. Tìm tất cả các đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn điều kiện:

$$x\,P(x-a) = (x-b)\ P(x)\ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Từ bài toán trên ta có thể mở rộng thêm một số bài toán.

Ví dụ 2. Tìm $P(x) \ \in \mathbb{R}[x]$ với các trị số thực thỏa mãn đẳng thức:

$$(x^3 + 3x^2 + 3x + 2)\ P(x-1) = (x^3 - 3x^2 + 3x - 2)\ P(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

2.2 Phương pháp đánh giá hàm số

Giả sử cần tìm hàm số $f(x)$ với miền xác định D_f, từ giả thiết bài toán và bằng lập luận ta đánh giá được $\begin{cases} f(x) \geq g(x), & \forall x \in D_f \\ g(x) \leq f(x), & \forall x \in D_f \end{cases}$

Trong đó $g(x)$ là một hàm số đã biết trước. Từ đó ta suy ra $f(x) = g(x) \ \ \forall x \in D_f$.

Ví dụ 3. (Olympic SV 2009). Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện:

i) $f(x) \leq 4 + 2009x, \forall x \in \mathbb{R}$;

ii) $f(x+y) \leq f(x) + f(y) - 4, \forall x \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 4. (Olympic Toán SV 2004). Xác định hàm số $f(x)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện:

i) $f(x) \geq e^{2004x}, \forall x \in \mathbb{R}$;

ii) $f(x+y) \geq f(x).f(y), \forall x \in \mathbb{R}$.

2.3 Phương pháp sử dụng các tính chất của đạo hàm, nguyên hàm và tích phân

Phương pháp này sử dụng các tính chất của đạo hàm, nguyên hàm, tích phân đối với một số phương trình hàm mà giả thiết là hàm khả vi, liên tục. Khi đó bằng các kỹ thuật biến đổi ta quy phương trình hàm đã cho về dạng thích hợp.

- Lấy đạo hàm hai vế của phương trình theo biến thích hợp.

- Lấy nguyên hàm hoặc tích phân với cận thích hợp. Khi đó nhờ các tính chất của đạo hàm, nguyên hàm, tích phân ta tìm được các hàm số.

Ví dụ 5. (Olympic 2001). Xác định tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ khả vi vô hạn và thỏa mãn điều kiện: $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 6. Tìm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$|f(x) - f(y)|^2 \leq |x-y|^3 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

2.4 Phương trình đa thức dạng $P(f).P(g) = P(h)$

Giả sử $f(x),\ g(x),\ h(x)$ thỏa mãn điều kiện $\deg f + \deg g = \deg h$. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn:

$$P\left[f(x)\right].P\left[g(x)\right] = P\left[h(x)\right]. \tag{10}$$

Định lý 1. *Nếu $P,\ Q$ là nghiệm của* (11) *thì $P.Q$ cũng là nghiệm của* (11).

Suy ra hệ quả: nếu $P(x)$ là nghiệm của (11) *thì $P^n(x)$ cũng là nghiệm của* (11).

Định lý 2. *Nếu $f,\ g,\ h$ là các đa thức thỏa mãn điều kiện* $\deg f + \deg g = \deg h$ *và thỏa mãn một trong các điều kiện sau:*

i) $\deg f \neq \deg g$;

ii) $\deg f = \deg g$ *và tổng hệ số cao nhất 2 đa thức* $\neq 0$.

Khi đó với một số nguyên dương n tồn tại nhiều nhất một đa thức $P(x)$ *có bậc n và thỏa mãn* (11).

Áp dụng 2 định lý trên thì ta thấy $P(x)$là đa thức bậc phải thỏa mãn (11) với $f,\ g,\ h$ là các đa thức thỏa mãn định lý 2 thì tất cả các nghiệm của (11) sẽ là

$$P(x) \equiv 0,\ \ P(x) \equiv 1,\ P(x) = \left[P_0(x)\right]^n \ \text{với}\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Ví dụ 7. (Olympic 2006). Tìm tất cả các đa thức thỏa mãn

$$P(x) + x\left[3P(x) + P(x)\right] = P^2(x) + 2x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \qquad (2)$$

Tài liệu tham khảo

[1]

[2]

[3]

MỘT SỐ DẠNG TOÁN MA TRẬN THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN TOÀN QUỐC

Sầm Thị Sen 53A Toán
Người hướng dẫn: TS. Thiều Đình Phong

1. Mở đầu

Kỳ thi Olympic Toán Sinh viên toàn quốc được tổ chức hằng năm, nhằm thúc đẩy phong trào học tập và nghiên cứu về Toán của sinh viên, đồng thời góp phần phát hiện, bồi dưỡng các sinh viên giỏi Toán trong các học viện, các trường đại học và cao đẳng của cả nước. Theo GS.TS Nguyễn Hữu Dư-phó chủ tịch kiêm Tổng bí thư Hội Toán học Việt Nam cho biết: kì thi là sân chơi trí tuệ đỉnh cao của các sinh viên đam mê Toán học. Toán học không chỉ là công cụ mạnh mẽ để giải quyết các bài toán chuyên môn; còn là môn học rèn luyện tư duy lôgic. Bên cạnh đó, kì thi cũng tạo ra cơ hội trao đổi, chia sẻ kiến thức trong lĩnh vực, giữa các chuyên gia, giảng viên, sinh viên các trường đại học với nhau.

Để ghóp phần giúp cho các bạn sinh viên có thêm tài liệu tham khảo ôn thi môn đại số trong kỳ thi Olympic Toán sinh viên toàn quốc, chúng tôi chọn chủ đề: "Một số dạng toán ma trận thi Olympic Toán sinh viên toàn quốc".

2. Các dạng toán và phương pháp giải

2.1 Bài toán tính toán trên các ma trận

a. Phương pháp 1: Chéo hóa ma trận

Tính chất. *Nếu ma trận vuông A cấp n có n vector riêng độc lập tuyến tính thì A chéo hóa được (nó đúng cả trên $\mathbb{R}$ và $\mathbb{C}$).*

Ở phương pháp này ta đưa ma trân A về ma trận đồng dạng dạng đường chéo. Các bước cụ thể:

(i) Tìm giá trị riêng, từ đó tìm được vector riêng tương ứng và xét xem A có chéo hóa được không.

(ii) Lập P là ma trận các vector riêng nếu A chéo hóa được.

(iii) Khi đó $B = P^{-1}.A.P$ là ma trận đường chéo với

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

gồm các giá trị riêng nằm trên đường chéo chính. Ta có

$$B^n = (P^{-1}AP)^n = P^{-1}A.P \dots .P^{-1}.A.P = P^{-1}.A^n.P \Rightarrow A^n = P.B^n.P^{-1}.$$

Phương pháp này có nhược điểm là tính toán phức tạp, nhiều khi không thực hiện được.

Ví dụ 1.1 (Olympic SV 2002). Cho $A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \end{bmatrix}$. Tính A^{2002}.

Ví dụ 1.2 (Olympic SV 2008). Cho A là ma trận vuông cấp 2 thỏa mãn det $A < 0$. Chứng minh rằng tồn tại hai số thực phân biệt $\lambda_1, \ \lambda_2$ và 2 ma trận A_1, A_2 sao cho

$$A^n = \lambda_1^n.A_1 + \lambda_2^n A_2, \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

Với phương pháp này, chúng ta có thể sáng tạo ra các bài toán mới bằng cách như sau:

- Chọn một ma trận chéo B và ma trận khả nghịch P cùng cấp.

- Tính $A = P^{-1}BP$.

Từ đó ta có bài toán yêu cầu tính lũy thừa ma trận A^n.

Ví dụ 1.3. Tính các lũy thừa ma trận sau:

(i) $\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix}^{2015}$; $\quad \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 10 & -3 \end{pmatrix}^{100}$; $\quad \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}^{2000}$.

(ii) $\begin{pmatrix} 15 & -4 & -4 \\ 24 & -5 & -3 \\ 108 & -16 & -18 \end{pmatrix}^{1004}$.

b. Phương pháp 2: Quy nạp

Trong phương pháp này, đầu tiên chúng ta dự đoán công thức A^n, sau đó chứng minh công thức A^n bằng quy nạp. Ưu điểm của phương pháp này là trình bày rõ ràng, ngắn gọn. Tuy nhiên nhược điểm của nó là rất khó để dự đoán công thức.

Ví dụ 1.4 (Olympic SV 1996).

Cho lũy thừa ma trận $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a_{11}(n) & a_{12}(n) & a_{13}(n) \\ a_{21}(n) & a_{22}(n) & a_{23}(n) \\ a_{31}(n) & a_{32}(n) & a_{33}(n) \end{bmatrix}$.

Tính $\lim_{n \to \infty} \frac{a_{22}(n)}{a_{32}(n)}$.

1.3. Phương pháp 3: Sử dụng ma trận lũy linh

Cho A là ma trận vuông cấp n, A được gọi là *ma trận lũy linh* nếu tồn tại số nguyên q sao cho $A^q = 0$ Sử dụng phương pháp này, để tính lũy thừa ma trận B^n, ta phân tích B thành tổng của ma trân lũy linh A và các ma trận đặc biệt. Từ đó đưa về việc tính hữu hạn các lũy thừa: $A^{q-1}, \ldots, A^2$.

Ví dụ 1.5 (Olympic SV 2006). Cho ma trận A = $\begin{pmatrix} 2006 & 1 & -2006 \\ 2005 & 2 & -2006 \\ 2005 & 1 & -2005 \end{pmatrix}$.

Xác định các phần tử trên đường chéo chính của ma trận:

$$S = I + A + A^2 + \ldots.. + A^{2006}.$$

Ví dụ 1.6 Tính A^{100} với A = $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.4. Bài toán tìm hạng của ma trận

Phương pháp thông dụng là dùng các phép biến đổi sơ cấp dòng hoặc cột, ta đưa A về ma trận khối $\begin{pmatrix} C & D \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, trong đó C là ma trận tam giác trên có các phần tử đường chéo chính khác không. Đây là ma trận hình thang, khi đó hạng của A chính bằng cấp của C.

Trong nhiều bài toán thi Olympic, phương pháp giải thường sử dụng hai bất đẳng thức sau:

Cho A, B là hai ma trận cùng kích cỡ, ta có:

$$\operatorname{rank}(A + B) \leq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) \leq n + \operatorname{rank}(AB).$$

Ví dụ 1.7 (Olympic SV 1994) Cho A là ma trận vuông cấp n thỏa mãn $A^2 = E$, trong đó E là ma trận đơn vị. Chứng minh rằng

$$\operatorname{rank}(A + E) + \operatorname{rank}(A - E) = n.$$

1.5 Ma trận đa thức

Cho $f(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_r t^r \in K[t]$ là đa thức một biến và $A \in M(n, k)$ là ma trận vuông, ta gọi $f(A) = a_0\, I + a_1 A + \cdots + a_r A^r$ là *ma trận đa thức*. Bài toán đặt ra là tính $f(A)$ khi đã cho biết A. Để giải quyết bài toán, chúng ta thường sử dụng các tính chất sau:

i) *Cho* $\forall f, g \in K[t]$ *và* $\alpha \in K$. *Khi đó*

$$(f + g)(A) = f(A) + g(A); (\alpha f)(A) = \alpha f(A); (fg)(A) = f(A)g(A).$$

ii) *Định lý Cayley-Hamilton.*

Gọi $f_A(t) = |A - tI|$ là đa thức đặc trưng của A. Khi đó $f_A(A) = 0$.

Để tính $f(A)$, ta thực hiện phép chia $f(t)$ cho $f_A(t)$ ta được $f(t) = q(t)\ f_A(t) + r(t)$. Theo định lý Cayley-Hamilton, ta có $f(A) = q(A)f_A(A) + r(A) = r(A)$. Nên ta đưa bài toán về tính $r(A)$ có bậc bé hơn.

2. Một số phương pháp tính định thức cấp n

2.1. Phương pháp biến đổi định thức về dạng tam giác

Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng (cột) của ma trận và các tính chất của định thức để biến đổi định thức của ma trận về dạng tam giác. Định thức sẽ bằng tích các phần tử trên đường chéo chính.

Ví dụ 2.1 (Olympic SV 2008). Cho a_0, d là các số thực, dãy $\{a_1\ ,\ a_2, ...,\ a_n\}$ lập thành cấp số cộng công sai d. Tính định thức của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & a_0 & a_1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 \end{pmatrix}.$$

2.2. Phương pháp quy nạp và truy hồi

Phương pháp truy hồi là biểu diễn định thức cần tính qua những định thức có cấp thấp hơn có dạng xác định và theo công thức xác định. Trong phương pháp truy hồi, ta thường dùng cách khai triển định thức theo hàng hoặc theo cột một cách hợp lý để đưa về định thức có cùng dạng nhưng với cấp thấp hơn.

Ví dụ 2.2. Tính định thức

$$D_n = \begin{vmatrix} cosx & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2cosx & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2cosx & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots. & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2cosx & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2cosx \end{vmatrix}.$$

2.3. Phương pháp biểu diễn định thức thành tổng các định thức

Giả sử $A = (a_{ij})_{n\times n}$ có cột j thỏa mãn $a_{ij} = a'_{ij} + a''_{ij}$ với i=$\overline{1,n}$, định thức ma trận A có thể tính bởi

$$|A| = \begin{vmatrix} \dots & a'_{1j} + a''_{1j} & \dots \\ \dots & a'_{2j} + a''_{2j} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & a'_{nj} + a''_{nj} & \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dots & a'_{1j} & \dots \\ \dots & a'_{2j} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & a'_{nj} & \dots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dots & a''_{1j} & \dots \\ \dots & a''_{2j} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & a''_{nj} & \dots \end{vmatrix}.$$

Phương pháp này rất hữu dụng khi ta tách được nhiều định thức có hai cột tỷ lệ (suy ra có giá trị định thức bằng 0) và các định thức còn lại đơn giản, dễ tính. Sau đây là một số ví dụ minh họa phương pháp.

Ví dụ 2.3 (Olympic SV 1993). Cho 2n số nguyên $a_1, a_2, \ldots a_n, b_1, b_2, \ldots b_n$ thỏa mãn điều kiện $\sum_{i=0}^{n} a_i b_i = 0$. Tính

$$A = \begin{vmatrix} 1+a_1b_1 & a_1b_2 & \ldots & a_1b_n \\ a_2b_1 & 1+a_2b_2 & \ldots & a_2b_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \ldots & 1+a_nb_n \end{vmatrix}.$$

Ví dụ 2.4 (Olympic SV 2003). Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1+x_1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x_2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x_3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x_4 \end{pmatrix},$$

trong đó x_1, x_2, x_3, x_4 là các nghiệm của đa thức $f(x) = x^4 - x + 1$. Tính $\det A$.

2.4. Phương pháp biểu diễn định thức thành tích các định thức

Phương pháp này sử dụng tính chất về định thức của tích. Tức là với A, B là các ma trận vuông cùng cấp, ta có $\det(AB) = \det(A).\det(B)$.

Ví dụ 2.6. Tính định thức cấp n ($n \geq 2$) sau:

$$detA = \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \ldots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \ldots & 1+x_2y_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \ldots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}.$$

2.5. Tính định thức của ma trận đa thức

Định lý. *Cho A là ma trận vuông cấp n và f(x) là một đa thức bậc m. Nếu $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ là các giá trị riêng của ma trận A thì ta có:*

(i) $\det f(A) = f(\lambda_1).f(\lambda_2)\ldots f(\lambda_n$.

(ii) $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \ldots, f(\lambda_n)$ *là các giá trị riêng của f(A).*

Nhận xét: Từ định lý trên ta có:

(i) Nếu λ là giá trị riêng của A thì $\forall$k$\in \mathbb{N}$, k$\geq$1, λ^k là giá trị riêng của A^k.

(ii) Nếu f(x) là một đa thức nhận A làm nghiệm, λ là giá trị riêng của A thì f(λ) = 0. Từ đây suy ra tập các giá trị riêng của ma trận A là tập con của tập nghiệm f(x).

Ví dụ 2.10 (Olympic SV 1999). Cho đa thức $f(x) = x^{1999} + x^2 - 1$ và ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tính $\det f(A)$.

3. Một số ví dụ khác

1. (Olympic SV 2011) Cho ma trận A = $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Hãy tính A^{2012}.

2. (Olympic SV 1999) Cho ma trận A = $\begin{pmatrix} \frac{x}{1998} & 1999 \\ 0 & \frac{x}{2000} \end{pmatrix}$, kí hiệu

$$A^n = \begin{pmatrix} a_{11}(n,x) & a_{12}(n,x) \\ a_{21}(n,x) & a_{22}(n,x) \end{pmatrix}.$$

Tìm $\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 1} a_{ij}$ (n,x), i,j = $\overline{1,2}$.

3. (Olympic SV 2010) Cho A, B là các ma trận vuông cấp 2010 với hệ số thực sao cho

$$\det A = \det(A+B) = \det(A+2B) + \cdots + \det(A+2010B) = 0.$$

(i) Chứng minh rằng $\det(xA + yB) = 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

(ii) Tìm ví dụ chứng tỏ kết quả trên không còn đúng nếu chỉ có

$$\det(A) = \det(A+B) = \det(A+2B) + \cdots + \det(A+2009B) = 0.$$

4. Với x$\neq$ 0, tính định thức

$$D_n = \begin{vmatrix} e^x + e^{-x} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & e^x + e^{-x} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & e^x + e^{-x} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & e^x + e^{-x} \end{vmatrix}.$$

Tài liệu tham khảo

[1] Lê Tuấn Hoa (2006), *Đại số tuyến tính*, NXB Đại Học Quốc Gia Hà Nội.

[2] Hồ Công Xuân Vũ Ý (2013), *Đại số tuyến tính*, Đại học Tiền Giang.

[3] *Tuyển tập các đề thi olympic 1994-2011*.

MỘT HƯỚNG XÂY DỰNG BẤT ĐẲNG THỨC TÍCH PHÂN

Võ Anh Tú, Trần Hoài Bảo - 54A Toán

Người hướng dẫn: ThS. Nguyễn Trần Thuận

3 Mở đầu

Bất đẳng thức tích phân là một nội dung quan trọng và thường gặp trong các kỳ thi Olympic Toán học sinh viên. Những bài toán liên quan đến bất đẳng thức tích phân thường là những bài toán tương đối khó và đôi khi cách tiếp cận lời giải của nó không "tự nhiên". Bên cạnh đó, nhiều bất đẳng thức tích phân có dạng tương tự như các bất đẳng thức đại số cổ điển như bất đẳng thức Bunhiakovski, Minkovski... và có thể sẽ có những hướng khác nhau để tiếp cận các bài toán dạng này. Tuy nhiên trong bài viết này, chúng tôi trình bày một hướng xây dựng bất đẳng thức tích phân nhờ vào các bất đẳng thức cổ điển thông qua con đường xây dựng tích phân. Cụ thể, chúng tôi sẽ chuyển các bất đẳng thức cổ điển dạng đại số (dạng rời rạc) sang dạng tích phân (dạng liên tục) như bất đẳng thức Bunhiakovski, Minkovski, Hölder, Jensen. Vì các bất đẳng thức trên được trình bày dưới dạng khá tổng quát nên khi đặc biệt hóa một số yếu tố, chúng ta sẽ thu được những bài toán thú vị.

4 Tích phân Riemann

Trong mục này, chúng tôi sẽ nhắc lại khái niệm và cách xây dựng tích phân Riemann.

Cho $[a;b]$ là một đoạn đóng và bị chặn của $\mathbb{R}$ $(a < b)$. Một họ hữu hạn các điểm $\{x_i, 1 \leq i \leq n\}$ mà $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ được gọi là một phép phân hoạch (hữu hạn) đoạn $[a;b]$ và ký hiệu là $\pi = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. Khi đó ta có

$$[a;b] = [x_0;x_1] \cup [x_1;x_2] \cup \cdots \cup [x_{n-1};x_n].$$

Số $d(\pi) = \max_{1\leq i\leq n}(x_i - x_{i-1}) = \max_{1\leq i\leq n} \Delta x_i$ được gọi là độ dài của phép phân hoạch π. Ta ký hiệu $\mathcal{P}[a;b]$ là họ tất cả các phép phân hoạch của $[a;b]$.

Xét $f(x)$ là hàm xác định trên đoạn $[a;b]$. Gọi $\pi = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathcal{P}[a;b]$ là một phân hoạch bất kỳ của $[a;b]$. Với mỗi $i = 1, \ldots, n$, trên mỗi đoạn $[x_{i-1};x_i]$, ta chọn một giá trị ξ_i tùy ý và ký hiệu $\gamma = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ là một cách chọn ứng với phân hoạch π. Lập tổng

$$S_\gamma^{(\pi)} = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$$

và $S_\gamma^{(\pi)}$ được gọi là tổng Riemann của f trên $[a;b]$ ứng với phân hoạch π và cách chọn γ.

Nếu với mọi cách chọn γ ứng với phân hoạch π, tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{d(\pi)\to 0} S_\gamma^{(\pi)} = S$$

và giới hạn S này không phụ thuộc vào phân hoạch π cũng như cách chọn γ thì ta nói $f(x)$ khả tích Riemann trên $[a;b]$ và S được gọi là tích phân Riemann (tích phân xác định) của $f(x)$ trên $[a;b]$, ký hiệu

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Sau đây chúng tôi nhắc lại một số tiêu chuẩn cơ bản để một hàm số khả tích.

Mệnh đề. *1) Nếu $f(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì $f(x)$ khả tích trên $[a;b]$.*
2) Nếu $f(x)$ bị chặn trên $[a;b]$ và có một số hữu hạn điểm gián đoạn trên $[a;b]$ thì $f(x)$ khả tích trên $[a;b]$.
3) Nếu $f(x)$ bị chặn và đơn điệu trên $[a;b]$ thì khả tích trên $[a;b]$.

5 Từ bất đẳng thức đại số đến bất đẳng thức tích phân

Trong mục này, chúng tôi sẽ chuyển một số bất đẳng thức cổ điển từ dạng đại số sang dạng tích phân bằng cách sử dụng định nghĩa tích phân.

5.1 Bất đẳng thức Bunhiakovski

Dạng đại số: *Cho hai dãy số thực $x_1, x_2, \ldots, x_n$ và $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Khi đó, ta có*

$$\Big(\sum_{i=1}^n x_i y_i\Big)^2 \le \Big(\sum_{i=1}^n x_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^n y_i^2\Big). \tag{3.1.1}$$

Từ bất đẳng thức Bunhiakovski dạng đại số (3.1.1) trên, ta có dạng tích phân tương ứng như sau:

Dạng tích phân: *Cho $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hai hàm liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó,*

$$\Big(\int_a^b f(x)g(x)dx\Big)^2 \le \Big(\int_a^b f^2(x)dx\Big)\Big(\int_a^b g^2(x)dx\Big). \tag{3.1.2}$$

Chứng minh. Bất đẳng thức (3.1.2) có thể được chứng minh dựa vào phương pháp xét dấu của tam thức bậc hai. Ở đây chúng tôi sẽ trình bày một cách chứng minh khác dựa vào định nghĩa tích phân.

Với mỗi số tự nhiên n, ta phân hoạch đoạn $[a;b]$ thành n phần có độ dài bằng nhau với các điểm chia $\xi_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, mỗi đoạn có độ dài bằng $(b-a)/n$. Áp dụng bất đẳng thức (3.1.1) ta có

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\xi_i)\Big)^2 \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} f^2(\xi_i)\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} g^2(\xi_i)\Big)$$

$$\iff \Big(\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}(f.g)(\xi_i)\Big)^2 \leq \Big(\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f^2(\xi_i)\Big)\Big(\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} g^2(\xi_i)\Big) \tag{3.1.3}$$

Vì f, g là các hàm liên tục trên $[a;b]$ nên $f.g$ cũng là hàm liên tục trên $[a;b]$, điều này đảm bảo cho sự tồn tại của các tích phân trong (3.1.2). Lấy giới hạn hai vế (3.1.3) khi $n \to \infty$ và sử dụng định nghĩa tích phân xác định ta thu được (3.1.2). □

5.2 Bất đẳng thức Minkovski

Dạng đại số: *Cho hai dãy số thực $x_1, x_2, \ldots, x_n$ và $y_1, y_2, \ldots, y_n$, và số thực $p \geq 1$. Khi đó, ta có*

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}|x_i + y_i|^p\Big)^{1/p} \leq \Big(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\Big)^{1/p}. \tag{3.2.1}$$

Từ bất đẳng thức Minkovski dạng đại số (3.2.1) trên, ta có dạng tích phân tương ứng như sau:

Dạng tích phân: *Cho các số thực $p, q > 1$ với $1/p + 1/q$ và $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hai hàm liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó,*

$$\Big(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx\Big)^{1/p} \leq \Big(\int_a^b |f(x)|^p dx\Big)^{1/p} + \Big(\int_a^b |g(x)|^p dx\Big)^{1/p}. \tag{3.2.2}$$

Chứng minh. Với mỗi số tự nhiên n, ta phân hoạch đoạn $[a;b]$ thành n phần có độ dài bằng nhau với các điểm chia $\xi_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Áp dụng bất đẳng thức (3.2.1) ta có

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}|f(\xi_i) + g(\xi_i)|^p\Big)^{1/p} \leq \Big(\sum_{i=1}^{n}|f(\xi_i)|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{i=1}^{n}|g(\xi_i)|^p\Big)^{1/p}$$

$$\Leftrightarrow \Big(\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}|(f+g)(\xi_i)|^p\Big)^{1/p} \leq \Big(\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}|f(\xi_i)|^p\Big)^{1/p} + \Big(\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}|g(\xi_i)|^p\Big)^{1/p} \tag{3.2.3}$$

Vì f, g là các hàm liên tục trên $[a; b]$ nên $f + g$ cũng là hàm liên tục trên $[a; b]$, điều này dẫn đến tồn tại tích phân ở vế trái của (3.2.2). Lấy giới hạn hai vế (3.2.3) khi $n \to \infty$ và sử dụng định nghĩa tích phân xác định ta thu được (3.2.2). $\square$

5.3 Bất đẳng thức Hölder

Dạng đại số: *Cho hai dãy số thực $x_1, x_2, \ldots, x_n$ và $y_1, y_2, \ldots, y_n$, các số thực $p, q > 1$ sao cho $1/p + 1/q = 1$. Khi đó, ta có*

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \Big)^{1/p} \Big(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q \Big)^{1/q}. \tag{3.3.1}$$

Từ bất đẳng thức Hölder dạng đại số (3.3.1) trên, ta có dạng tích phân tương ứng như sau:

Dạng tích phân: *Cho các số thực $p, q > 1$ với $1/p + 1/q = 1$ và $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hai hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó,*

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \Big(\int_a^b |f(x)|^p dx \Big)^{1/p} \Big(\int_a^b |g(x)|^q dx \Big)^{1/q}. \tag{3.3.2}$$

Chứng minh. Với mỗi số tự nhiên n, ta phân hoạch đoạn $[a; b]$ thành n phần có độ dài bằng nhau với các điểm chia $\xi_k = a + \frac{k}{n}(b - a)$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Áp dụng bất đẳng thức (3.3.1) ta có

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i)g(\xi_i)| \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i)|^p \Big)^{1/p} \Big(\sum_{i=1}^{n} |g(\xi_i)|^q \Big)^{1/q} \\ \iff & \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} |(f.g)(\xi_i)| \leq \Big(\frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i)|^p \Big)^{1/p} \Big(\frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} |g(\xi_i)|^q \Big)^{1/q} \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

Vì f, g là các hàm liên tục trên $[a; b]$ nên $f.g$ cũng là hàm liên tục trên $[a; b]$, điều này đảm bảo cho sự tồn tại của các tích phân trong (3.3.2). Lấy giới hạn hai vế (3.3.3) khi $n \to \infty$ và sử dụng định nghĩa tích phân xác định ta thu được (3.3.2). $\square$

5.4 Bất đẳng thức Jensen

Trước tiên, ta nhắc lại khái niệm về hàm lồi. Hàm số $f : I \to \mathbb{R}$ được gọi là lồi trên khoảng $I \subset \mathbb{R}$ nếu với mọi $x, y \in I$ và mọi $\lambda \in [0; 1]$ ta luôn có

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y).$$

Từ định nghĩa trên và phương pháp quy nạp, ta chứng minh được rằng nếu $f : I \to \mathbb{R}$ là hàm lồi trên I thì

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n)$$

với mọi $x_1, \dots, x_n \in I$, mọi $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ không âm thỏa mãn $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

Bất đẳng thức Jensen dạng tích phân: *Cho* $g : [a;b] \to \mathbb{R}$ *là hàm liên tục trên* $[a;b]$ *và* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *là hàm liên tục và lồi trên* $\mathbb{R}$. *Khi đó,*

$$f\Big(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx\Big) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b (f \circ g)(x)dx. \tag{3.4.1}$$

Chứng minh. Với mỗi số tự nhiên n, ta phân hoạch đoạn $[a;b]$ thành n phần có độ dài bằng nhau với các điểm chia $\xi_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$, $k = 0, 1, \dots, n$. Áp dụng bất đẳng thức trong định nghĩa hàm lồi nêu trên với $\lambda_i = 1/n$, ta có

$$\begin{aligned}
& f\Big(\frac{1}{n}g(\xi_1) + \cdots + \frac{1}{n}g(\xi_n)\Big) \le \frac{1}{n}f(g(\xi_1)) + \cdots + \frac{1}{n}f(g(\xi_n)) \\
\iff & f\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Big) \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(f \circ g)(\xi_i) \\
\iff & f\Big(\frac{1}{b-a}.\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Big) \le \frac{1}{b-a}.\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}(f \circ g)(\xi_i).
\end{aligned} \tag{3.4.2}$$

Vì f liên tục trên $\mathbb{R}$, g liên tục trên $[a;b]$ nên hàm $f \circ g$ cũng liên tục trên $[a;b]$, do đó nó khả tích trên $[a;b]$. Cho $n \to \infty$ ở hai vế của (3.4.2) ta được

$$\begin{aligned}
& \lim_{n\to\infty} f\Big(\frac{1}{b-a}.\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Big) \le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b-a}.\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}(f \circ g)(\xi_i) \\
\iff & f\Big(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b-a}.\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Big) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b (f \circ g)(x)dx \\
\iff & f\Big(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx\Big) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b (f \circ g)(x)dx,
\end{aligned}$$

ta có điều phải chứng minh. □

Cho I là một khoảng của $\mathbb{R}$. Người ta đã chứng minh được rằng nếu $f : I \to \mathbb{R}$ có đạo hàm cấp 2 không âm trên I thì f là hàm lồi trên I. Đặc biệt hóa hàm lồi f trong bất đẳng thức Jensen, ta thu được các bất đẳng thức thú vị sau:

(1) Với $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, ta có bất đẳng thức quen thuộc

$$\Big|\int_a^b g(x)dx\Big| \le \int_a^b |g(x)|dx.$$

(2) Với $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, ta có

$$\Big(\int_a^b g(x)dx\Big)^2 \le (b-a)\int_a^b g^2(x)dx$$

và đây cũng là một dạng đặc biệt của bất đẳng thức Bunhiakovski.

(3) Với $f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$, ta có

$$e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx} \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b e^{g(x)}dx.$$

(3.1) Khi cho $g(x) = x^2$, ta có bất đẳng thức

$$(b-a)e^{(a^2+ab+b^2)/3} \leq \int_a^b e^{x^2}dx.$$

(3.2) Khi cho $g(x) = 1/x$ và xét $a = 1, b = 2015$, ta có

$$2015.2014^{2014} \leq \left(\int_1^{2015} e^{1/x}dx\right)^{2014}.$$

Tài liệu tham khảo

[1] Võ Giang Giai, *Chuyên đề bất đẳng thức*, NXB ĐHQG Hà Nội, 2002.

[2] Lê Viết Ngư (chủ biên), *Toán cao cấp - Tập 2 (Giải tích - Hàm một biến)*, NXB Giáo dục, 2000.

[3] Các tài liệu trên Wikipedia.

[4] *Tập san toán học và sinh viên*, Số **21**, Khoa Toán, Trường Đại học Vinh, 2004.

MỘT SỐ KỸ THUẬT GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ TRONG CÁC ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TỈNH VÀ ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG

Bùi Hải Vân - 54A Toán

Người hướng dẫn: TS. Phạm Xuân Chung

1. Mở đầu

Tổng quan tình hình nghiên cứu thuộc lĩnh vực đề tài: Phương trình là một nội dung kiến thức quan trọng trong chương trình toán phổ thông. Phương pháp giải các phương trình rất đa dạng, nhiều học sinh còn lúng túng khi tìm cách giải một phương trình, đặc biệt là phương trình vô tỉ. Vì vậy, đã có nhiều tài liệu, sách tham khảo, cũng như sáng kiến kinh nghiệm của giáo viên dạy ở các trường phổ thông viết về " *phương pháp giải phương trình vô tỉ*". Tuy nhiên, trong hầu hết các tài liệu trình bày theo một cấu trúc: phương pháp giải, ví dụ, lời giải, bài tập tương tự mà chưa chú ý tới định hướng cho học sinh cách tìm ra lời giải, lý giải cho học sinh vì sao lại làm thế và cách tạo ra bài toán tương tự.

Tính cấp thiết của vấn đề nghiên cứu:Trong những năm gần đây, phương trình vô tỉ xuất hiện nhiều trong các đề thi học sinh giỏi và đề thi tuyển sinh đại học, cao đẳng ở các mức độ khó dễ khác nhau. Việc tìm hiểu các kĩ thuật giải thường được sử dụng trong các kì thi đó không chỉ là của người giáo viên mới vào nghề, mà của bất kỳ người giáo viên nào. Đặc biệt đối với sinh viên ngành Sư phạm Toán, ngay từ khi đang học ở trường đại học quan tâm đến vấn đề này vừa nâng cao được năng lực giải toán của bản thân, vừa tìm được cách thức dẫn dắt học sinh tìm tòi lời giải và biết cách để tạo ra các bài toán mới từ các kĩ thuật đó, đáp ứng yêu cầu bồi dưỡng học sinh khá, giỏi sau khi ra trường. Vì vậy, việc nghiên cứu về các kĩ thuật giải phương trình vô tỉ trong các đề thi học sinh giỏi Tỉnh và đề thi đại học, cao đẳng là rất cần thiết.

Mục tiêu:Tìm hiểu, định hướng cho học sinh các kĩ thuật giải phương trình vô tỉ trong các đề thi học sinh giỏi Tỉnh, đề thi tuyển sinh vào đại học, cao đẳng và vận dụng các kĩ thuật đó để xây dựng các bài toán mới.

Phương pháp nghiên cứu: Nghiên cứu lý luận.

Đối tượng và phạm vi nghiên cứu: Các kĩ thuật giải phương trình vô tỉ trong các đề thi học sinh giỏi Tỉnh Nghệ An, Hà Tĩnh (2009 – 2015), đề thi tuyển sinh vào đại học, cao đẳng (2008 – 2012).

2. Nội dung nghiên cứu và các kết quả nghiên cứu đạt được

2.1 Một số kỹ thuật giải phương trình vô tỷ trong các đề thi

2.1.1 Kĩ thuật nhân lượng liên hợp

a. Liên hợp với một số

Khi giải các phương trình chứa căn thức, thông thường đầu tiên ta nghĩ đến việc làm mất đi các dấu căn bằng cách nâng lên lũy thừa. Nhưng đối với phương trình vừa chứa căn bậc hai vừa chứa căn bậc ba hoặc chứa nhiều căn dáu căn bậc hai thì việc nâng lên lũy thừa để khử các dấu căn là rất phức tạp và không dễ dàng. Hõn nữa, cho dù làm mất hết các dấu căn và khi đưa về phương trình bậc cao thì việc tìm ra nghiệm của nó cũng không hề đơn giản. Khi đó, ta nghĩ đến việc làm mất hết các dấu căn bằng cách nhân lượng liên hợp phù hợp, không làm mất hoàn toàn căn thức nhưng lại rút được nhân tử chung để đưa về phương trình tích để giải. Chúng tôi, xin đưa ra một ví dụ cụ thể sau:

Ví dụ 1. *Đề thi học sinh giỏi tỉnh Nghệ An – Năm 2011*

Giải phương trình: $2(x-2)(\sqrt[3]{x+5}+2\sqrt{2x-5})=3x-1$.

Lời giải: Điều kiện xác định : $x \geq \frac{5}{2}$;$2\left(x-2\right)\left(\sqrt[3]{x+5}+\sqrt{2x-5}\right)=3x-1$. Phương trình tương đương

$$2\left(x-2\right)\left(\sqrt[3]{x-5}-2+2\sqrt{2x-5}-2+4\right)=3x-1$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x-2\right)\left(\frac{x-3}{\sqrt[3]{\left(x+5\right)^2}+2\sqrt[3]{x+5}+4}+\frac{2\left(2x-6\right)}{\sqrt{2x-5}+1}\right)+8\left(x-2\right)=3x-1$$

$$\Leftrightarrow \left(x-3\right)\left(\frac{2\left(x-2\right)}{\sqrt[3]{\left(x+5\right)^2}+2\sqrt[3]{x+5}+4}+\frac{8\left(x-2\right)}{\sqrt{2x-5}+1}+5\right)=0$$

$\Leftrightarrow\ x-3=0 \Leftrightarrow x=3$ (thỏa mãn ĐĐKXĐĐ)

$$\left(\text{do }\ x \geq \frac{5}{2}\ \Rightarrow x-2 \geq \frac{1}{2}>0 \Rightarrow \frac{2\left(x-2\right)}{\sqrt[3]{\left(x+5\right)^2}+2\sqrt[3]{x+5}+4}+\frac{8\left(x-2\right)}{\sqrt{2x-5}+1}+5>0\right).$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x=3$.

Bình luận: Ta thấy trong lời giải trên, các bước biến đổi tương đương là hoàn toàn dễ hiểu. Nhưng câu hỏi đặt ra ở đây là tại sao ta lại thêm bớt một lượng liên hợp là 2 mà không phải là một hằng số nào khác? Việc thêm không phải ngẫu nhiên mà nó có thể được lý giải như sau: Đầu tiên ta nhẩm được 1 nghiệm của phương trình là x=3. Như vậy, khi đưa phương trình về dạng tích thì vế trái sẽ chứa nhân

tử $(x-3)$. Do ban đầu ta chưa biết thêm bớt lượng liên hợp là bao nhiêu nên ta sẽ giả sử lượng đó là α và β. Khi đó, ta có : $\sqrt[3]{x+5}-\alpha$ và $2\sqrt{2x-5}-\beta$ sau khi nhân liên hợp xong tử số lần lượt sẽ là $x+5-\alpha^3$ và $8x-20-\beta^2$. Mà ta đang muốn làm xuất hiện nhân tử $(x-3)$ do đó:
$\begin{cases} x+5-\alpha^3 = x-3 \\ 8x-20-\beta^2 = 8(x-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 2 \end{cases}$. Như vậy, ta có thể đưa ra lời giải.
Qua lời giải và phân tích trên, chúng tôi xin đề xuất, các bước làm trong kĩ thuật này như sau:

(i) Bước 1: Đặt điều kiện xác định (nếu có). Nhẩm 1 nghiệm x_0 của phương trình;

(ii) Bước 2: Tìm ra lượng liên hợp phù hợp bằng phương pháp hệ số bất định;

(iii) Bước 3: Nhân liên hợp rút nhân tử chung $(x-x_0)$, đưa về phương trình tích;

(iv) Bước 4: Giải và kết luận nghiệm.

b. Liên hợp với một nhị thức

Tương tự với cách nhân liên hợp với một số đối với bài toán nhẩm được 2 nghiệm thì ta có thể nhân lượng liên hợp với một nhị thức.

Ví dụ 2: *Đề thi học sinh giỏi tỉnh Nghệ An – năm 2010*

Giải phương trình: $x-1+\sqrt{x+1}+\sqrt{2-x}=x^2+\sqrt{2}$.

Lời giải: Điều kiện xác định: $-1 \le x \le 2$.

$$\Leftrightarrow x-x^2+\sqrt{x+1}-\left(\left(\sqrt{2}-1\right)x+1\right)+\sqrt{2-x}-\left(\left(1-\sqrt{2}\right)x+\sqrt{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x-x^2+\frac{\left(3-\sqrt{2}\right)(x-x^2)}{\sqrt{x+1}+\left(\sqrt{2}-1\right)x+1}+\frac{\left(3-\sqrt{2}\right)(x-x^2)}{\sqrt{2-x}+\left(1-\sqrt{2}\right)x+\sqrt{2}}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-x^2\right)\left[1+\frac{\left(3-\sqrt{2}\right)}{\sqrt{x+1}+\left(\sqrt{2}-1\right)x+1}+\frac{\left(3-\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2-x}+\left(1-\sqrt{2}\right)x+\sqrt{2}}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow x-x^2=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ (thỏa mãn ĐĐKXĐĐ) hoặc } x=1 \text{ (thỏa mãn ĐĐKXĐĐ)}$$

(do $1+\frac{\left(3-\sqrt{2}\right)}{\sqrt{x+1}+\left(\sqrt{2}-1\right)x+1}+\frac{\left(3-\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2-x}+\left(1-\sqrt{2}\right)x+\sqrt{2}}>0$, với $\forall x \in [-1;2]$).

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x=0$ và $x=1$.

Bình luận: Trong lời giải trình bày ở trên, ta cảm thấy lời giải không mấy tự nhiên. Làm sao có thể thêm bớt một lượng liên hợp mà hệ số đứng trước x lại rắc rối đến vậy? Việc thêm bớt như vậy lại càng không phải do may mắn mà có? Sau đây sẽ là sự lí giải cho lời giải trên. Rõ ràng ta nhẩm được $x=0$ và $x=1$ là nghiệm của phương trình trên, do đó nếu đưa phương trình về dạng phương trình tích để giải thì chắc chắn có nhân tử chung là $x\left(x-1\right)$. Khi đó các giá trị 0 và 1 sẽ làm cho các biểu thức ở vế trái bằng 0. Để làm mất dấu căn thức và xuất hiện nhân tử $x\left(x-1\right)$ (bậc 2) ta không thể nhân chúng với lượng liên hợp là một hằng số bời sau khi làm mất căn thức, biểu thức nhận được mới ở dạng bậc 1. Do đó, ta nghĩ đến nhân liên hợp với một nhị thức, hi vọng sẽ làm xuất hiện nhân tử chung bậc 2. Giả sử lượng nhân liên hợp đó là $ax+b,\ \left(a\neq 0\right)$.

Ta có giá trị của $\sqrt{x+1}-\left(ax+b\right)$ bằng 0 tại các giá trị của nghiệm là $x=0$ và $x=1$. Tức là: $\begin{cases} 1-b=0 \\ \sqrt{2}-a-b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ a=\sqrt{2}-1 \end{cases}$.

Như vậy, ta đã có liên hợp để làm mất dấu căn thức thứ nhất. Tương tự cách làm trên đối với dấu căn thức thứ 2 và cho ra lời giải là xong, bài toán đã được giải quyết.

Từ lời giải và những phân tích trong bài này, chúng tôi đưa ra các bước làm cụ thể như sau:

(i) Bước 1: Đặt điều kiện xác định (nếu có). Nhẩm được 2 nghiệm $x_1;x_2$ của phương trình;

(ii) Bước 2: Đặt nhị thức cần nhân liên hợp là $ax+b$, tìm các hệ số $a;b$ thích hợp;

(iii) Bước 3: Nhân biểu thức liên hợp rút nhân tử chung là $\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$, đưa về phương trình tích;

(iv) Bước 4: Giải phương trình và kết luận nghiệm.

2.1.2. Kĩ thuật dùng tính đơn điệu của hàm số

Trong kĩ thuật này ta sẽ sử dụng các tính chất sau đây:

(i) **Tính chất 1:** *Nếu hàm số $y=f(x)$ đơn điệu trên 1 khoảng K nào đó của $\mathbb{R}$ thì phương trình $f\left(x\right)=0$ có không quá 1 nghiệm trên K.*

(ii) **Tính chất 2:** *Nếu $y=f(x)$ đơn điệu trên một khoảng K nào đó của $\mathbb{R}$ thì phương trình $f\left(u\right)=f\left(v\right)\Leftrightarrow u=v$ vi $\forall\ u;;v\ \in K$.*

Nếu bài toán áp dụng Tính chất 1, ta thực hiện các bước như sau:

(i) Bước 1: Đặt điều kiện xác định (nếu có), chuyển hết các phần tử về vế trái, vế phải bằng 0;

(ii) Bước 2: Đặt biểu thức thu được ở vế trái là $f(x)$, xét tính đơn điệu của $f(x)$ trên tập xác định K (K là một khoảng nào đó trên $\mathbb{R}$);

(iii) Bước 3: Nhẩm được 1 nghiệm của phương trình, áp dụng tính chất 1 để khẳng định nghiệm nhẩm được là duy nhất.

Ví dụ 3: *Đề thi học sinh giỏi tỉnh Nghệ An – năm 2009.*

Giải phương trình: $2009^x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=1.$

Nếu áp dụng Tính chất 2, ta có các bước giải sau:

(i) Bước 1: Đặt điều kiện xác định (nếu có). Biến đổi phương trình về dạng $f(u)=f(v)$, với u, v là các biểu thức biến x; $u, v \in$ K, (K là một khoảng nào đó của $\mathbb{R}$);

(ii) Bước 2: Xét tính đơn điệu của hàm số $y=f(t)$ với $t \in$ K;

(iii) Bước 3: Áp dụng tính chất 2, giải phương trình $u=v$ và kết luận nghiệm của phương trình đã cho.

Ví dụ 4: *Đề thi học sinh giỏi lớp 12 tỉnh Nghệ An - Năm 2013.*

Giải phương trình:

$$\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt[3]{2x+1}-3}=\frac{1}{x+2}.$$

Ví dụ 5: *Đề thi học sinh giỏi lớp 11 tỉnh Hà Tĩnh - Năm 2015.*

Giải phương trình: $8x^3+10x-17=8\sqrt[3]{-24x^2+30x-7}.$

2.1.3. Kĩ thuật đặt ẩn phụ

Đặt ẩn phụ là một kĩ thuật thường dùng, quen thuộc trong khi giải các phương trình đặc biệt là các phương trình vô tỉ. Việc đặt ẩn phụ giúp ta đơn giản hóa bài toán với biến số mới và các bước giải sẽ dễ dàng hõn. Các bước làm như sau:

(i) Bước 1: Đặt điều kiện xác định (nếu có) của phương trình. Chọn ẩn phụ thích hợp và đặt điều kiện (nếu có) cho ẩn phụ;

(ii) Bước 2: Biểu diễn các yếu tố còn lại theo ẩn phụ, lập được phương trình mới với ẩn phụ vừa đặt;

(iii) Bước 3: Nếu chỉ đặt 1 ẩn phụ thì ta giải luôn phương trình với 1 biến mới rồi suy ra nghiệm của phương trình; nếu đặt từ 2 ẩn phụ trở lên ta tìm cách biểu thị mối quan hệ các ẩn phụ với nhau từ đó tìm được nghiệm của phương trình;

(iv) Bước 4: Kết luận nghiệm của phương trình.

Sau đây là một số ví dụ cụ thể về giải các phương trình sử dụng kĩ thuật này:

Ví dụ 6: *Đề thi tuyển sinh đại học Khối A – Năm 2009.*

Giải phương trình: $2\sqrt[3]{3x-2}+\sqrt{6-5x}-8=0$.

Ví dụ 7: *Đề chọn học sinh giỏi lớp 10 tỉnh Hà Tĩnh – Năm 2010.*

Giải phương trình: $x^2+2x+4=3\sqrt{x^3+4x}$.

Ví dụ 8**:** *Đề thi tuyển sinh đại học khối B – Năm 2011.*

Giải phương trình: $3\sqrt{2+x}-6\sqrt{2-x}+4\sqrt{4-x^2}=10-3x$.

2.2. Vận dụng các kĩ thuật để xây dựng các bài toán mới

Từ những kĩ thuật trình bày ở phần I, ta có thể tạo ra một số bài toán mới với lời giải tương tự.

2.2.1. Xây dựng từ kĩ thuật nhân liên hợp

Với kĩ thuật này, ta có thể tạo ra các bài toán mới xuất phát từ các biểu thức chứa cãn, sau đó thay một giá trị của $x=\alpha$ nào đó và ta coi đó là nghiệm của phương trình mà ta sẽ nhẩm được. Sau khi thay xong ta chỉ cần thêm bớt một lượng có thể là một hằng số hoặc một biểu thức nào đó để cho tất cả cùng triệt tiêu và biến đổi phương trình về dạng gọn hõn. Các bước biến đổi, thêm bớt sẽ làm cho độ khó của phương trình mới tăng lên. Chúng tôi xin đề xuất một số bài toán sau:

Bài toán 1.1: Giải phương trình:

$$(x-5)\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}\right)+2x^2-5x-8=0.$$

Bài toán 1.2: Giải phương trình:

$$\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}\right)=\frac{2x^2-5x-8}{x-5}.$$

Bài toán 1.3: Giải phương trình:

$$\sqrt[4]{3x+22}+\sqrt[3]{2x-4}-\sqrt{2-x}=-2.$$

Bài toán 1.4: Giải phương trình:

$$\sqrt[4]{3x+22}+\sqrt[3]{2x-4}-\sqrt{2-x}=x^3+7x^2-14x-32.$$

Bài toán 1.5: Giải phương trình:

$$\sqrt{x+1}-2\sqrt{x+3}+\sqrt{2-x}-\sqrt{3}+\sqrt{x+3}\left(x^2-x\right)=0.$$

Bài toán 1.6: Giải phương trình:

$$\frac{\sqrt{x^2+4x+3}+\sqrt{6-x-x^2}-\sqrt{3x+9}}{x+3}=2+x-x^2.$$

2.2.2. Xây dựng các bài toán từ kĩ thuật sử dụng tính đơn điệu của hàm số

Muốn xây dựng một bài toán sử dụng phương pháp này ta có thể làm như sau. Trước hết ta chọn 1 hàm $f\left(t\right)$ đơn điệu trên một khoảng nào đó, sau đó chọn u, v là các biểu thức biến x sao cho phương trình $u=v$ giải được và cho $f\left(u\right)=f(v)$ rồi rút gọn ta được bài toán mới. Có thể đề xuất một số bài toán sau:

Bài toán 2.1: Giải phương trình:

$$\frac{1}{x+2}-\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}+2\sqrt{x-1}=x^2+3x+4.$$

Bài tập 2.2: Giải phương trình:

$$\sqrt[3]{3x-1}-\left(11-2x\right)\sqrt{7-2x}+9x-24=0.$$

2.2.3. Xây dựng bài toán từ kĩ thuật đặt ẩn phụ

Trong Ví dụ 9 và 10 (mục I) ta đã giải chúng bằng đặt ẩn phụ và đưa về phương trình tích với ẩn phụ (hoặc đưa về phương trình đẳng cấp, hoặc đưa về được phương trình dạng bậc hai sau đó ta tính biệt thức denta đối với 1 ẩn, ẩn còn lại là tham số). Như vậy muốn tạo ra được một bài tập giải phương trình ta xuất phát từ các đa thức đã đưa về dạng nhân tử của 2 biến u, v sau đó ta khai triển đa thức đó ra và thay u, v bởi các biểu thức biến x. Chẳng hạn ta có ví dụ sau:

Bài tập 2.3: Giải phương trình:

$$3\sqrt{x+2}-6\sqrt{3-x}-3\sqrt{6+x-x^2}=x-8.$$

{Chọn $u=\sqrt{x+2};;v=\sqrt{3-x}$ và đa thức đa thức $\left(u-2v\right)\left(u-v+3\right)$}

Và bằng cách tương tự như vậy ta có thể ra thêm các bài toán dạng tương tự để luyện tập cho học sinh. Từ các bài toán trên ta nhân thấy rằng, mục đích cuối cùng của việc sử dụng các kĩ thuật đó là đưa phương trình về dạng phương trình tích để giải. Vậy nếu như ta thay dấu "=" bởi các dấu $>, \geq, <, \leq$ thì từ bài toán giải phương trình ta có thể tạo ra bài toán giải bất phương trình hay không? Đây cũng là một ý tưởng khá hay vì nếu trong phương trình vô tỉ ta có thể đưa vế trái về phương trình tích thì bất phương trình tương ứng của nó cũng có thể đưa về dạng tích. Sau đó, ta chỉ cần xét dấu các nhân tử thì có thể tìm ra nghiệm của bất phương trình. Từ ý tưởng nói trên, chúng tôi xin đề xuất một số bài tập về bất phương trình vô tỉ như sau:

Ví dụ 2.4: Giải các bất phương trình sau:

(i) $\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}\right) \geq \frac{2x^2-5x-8}{x-5} \quad (x \in \mathbb{R})$.

(ii) $\sqrt[4]{3x+22}+\sqrt[3]{2x-4} \leq \sqrt{2-x}-2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

(iii) $\frac{\sqrt{x^2+4x+3}+\sqrt{6-x-x^2}-\sqrt{3x+9}}{x+3} > 2+x-x^2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

(iv) $3\sqrt{x+2}-6\sqrt{3-x}-3\sqrt{6+x-x^2} < x-8 \quad (x \in \mathbb{R})$.

3. Kết luận và kiến nghị

Các kĩ thuật được nghiên cứu là những kĩ thuật thông dụng nhất khi giải các phương trình vô tỉ trong đề thi học sinh giỏi Tỉnh và thi tuyển sinh vào đại học, cao đẳng. Nó không chỉ giúp người giáo viên định hướng học sinh đưa ra lời giải cho bài toán khó mà còn phát huy tính chủ động, sáng tạo của các em để suy luận, tự tạo ra các phương trình mới. Những kĩ thuật này cần được phổ biến rộng rãi đặc biệt đối với các học sinh và giáo viên bồi dưỡng học sinh khá, giỏi ở bậc trung học phổ thông.

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Tài Chung (năm 2014), *Sáng tạo và giải phương trình, hệ phương trình, bất phương trình*, Nhà xuất bản tổng hợp thành phố Hồ Chí Minh.

[2] Phạm Kim Chung, Đào Văn Trung, Dương Văn Sơn (năm 2015), *Rèn luyện kĩ năng và tư duy giải toán Hệ phương trình*, Nhà xuất bản đại học quốc gia Hà Nội.

[3] TS. Lê Xuân Sơn, ThS. Lê Khánh Hưng (năm 2014), *Phương pháp hàm số trong giải toán phương trình, bất phương trình, hệ phương trình, chứng minh bất đẳng thức, giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất*, Nhà xuất bản đại học quốc gia Hà Nội.

[4] Ngô Long Hậu, Trần Thanh Phong, Nguyễn Đình Thọ (năm 2011), *Giới thiệu đề tuyển sinh vào Đại học – Cao đẳng toàn quốc từ năm học 2002 – 2003 đến năm học 2011-2012 Môn Toán*, Nhà xuất bản Hà Nội.

[5] Các đề thi học sinh giỏi môn Toán,Tỉnh Nghệ An, Hà Tĩnh từ năm 2009 – 2015.

Điện thoại liên hệ: 01675903252

Địa chỉ email: buihaivan.2508@gmail.com.