

Câu 1 Cho các số x_1, x_2, \dots, x_n sao cho $x_k \in \{-1, 1\}$ với mọi $1 \leq k \leq n$. Chứng minh rằng nếu

$$P = x_1x_2x_3x_4 + x_2x_3x_4x_5 + \dots + x_{n-1}x_nx_1x_2 + x_nx_1x_2x_3 = 0$$

thì n chia hết cho 4.

Câu 2 Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x + \sqrt{y}} - \sqrt{x - \sqrt{y}} = \sqrt{4x - y} \\ \sqrt{x^2 - 16} = 2 + \sqrt{y - 3x}. \end{cases}$$

Câu 3 Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{x^2 + y^2 + 2x + 1} + \sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 1} + \sqrt{3x^2 + 3y^2 - 12y + 12}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Câu 4 Cho dãy số $(a_n)_{n \geq 1}$ thỏa mãn

$$a_1 = 1 \text{ và } a_{n+1} = \sqrt{a_1 + a_2 + \dots + a_n}; \quad n \geq 2.$$

Tính

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}.$$

Câu 5 Cho AB là dây cung cố định của đường tròn (O) . Tiếp tuyến tại A, B của (O) cắt nhau tại C . P là điểm trên cung nhỏ AB (P khác điểm chính giữa của cung nhỏ AB). Tiếp tuyến tại P của (O) cắt hai đường thẳng CA, CB tương ứng tại M, N ; I là giao điểm của MB và NA .

- Chứng minh ba điểm C, P, I thẳng hàng.
- Gọi K là giao điểm của AP với BC . Chứng minh OK vuông góc với BM .
- Gọi d là đường thẳng qua O vuông góc với CP . Chứng minh ba đường thẳng MN, AB, d đồng quy.

Câu 6 Cho dãy hữu hạn các số tự nhiên $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ có tính chất sau đây: với mỗi $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ thì a_i là số các số hạng nhận giá trị bằng i trong dãy trên (chẳng hạn, dãy gồm 4 số hạng là $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 1, a_3 = 0$). Chứng minh rằng khi $n \geq 7$ thì có duy nhất dãy gồm n số hạng thỏa mãn tính chất trên là

$$n - 4, 2, 1, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, 0.$$

Hết

Chú ý: Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

Họ và tên thí sinh: _____ Lớp: _____