TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH
KHOA SƯ PHẠM TOÁN HỌC

ĐÁP ÁN - THANG ĐIỂM
KỲ THI OLYMPIC TOÁN SƠ CẤP
Năm học 2014 - 2015

Câu 1 *Cho các số* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *sao cho* $x_k \in \{-1, 1\}$ *với mọi* $1 \leqslant k \leqslant n$. *Chứng minh rằng nếu*

$$P = x_1x_2x_3x_4 + x_2x_3x_4x_5 + \cdots + x_{n-1}x_nx_1x_2 + x_nx_1x_2x_3 = 0$$

thì n *chia hết cho 4.*

Lời giải. Ký hiệu $P_j = x_jx_{j+1}x_{j+2}x_{j+3}$, $1 \leqslant j \leqslant n$ với quy ước $x_{n+1} = x_1$, $x_{n+2} = x_2$, $x_{n+3} = x_3$. Khi đó $P_j \in \{-1, 1\}$ và $P = \sum_{j=1}^{n} P_j$. Giả sử có m giá trị P_j bằng -1 và $n-m$ giá trị P_j bằng 1, khi đó vì $P = 0$ nên $n = 2m$, từ đây suy ra n chẵn. Ta có

$$\prod_{j=1}^{n} P_j = \prod_{i=1}^{n} (x_i)^4 = 1,$$

mặt khác

$$\prod_{j=1}^{n} P_j = (-1)^m (1)^{n-m} = (-1)^m.$$

Điều này dẫn đến m chẵn. Vậy n chia hết cho 4.

Câu 2 *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} \sqrt{x+\sqrt{y}} - \sqrt{x-\sqrt{y}} & = \sqrt{4x-y} \\ \sqrt{x^2-16} & = 2 + \sqrt{y-3x}. \end{cases}$$

Lời giải. Điều kiện: $x \geq 4$, $y \geq 0$, $x^2 \geq y$, $4x \geq y$ và $y \geq 3x$. Khi đó, PT đầu tương đương với

$$\begin{aligned} & 2x - 2\sqrt{x^2-y} = 4x - y \\ \Leftrightarrow\ & 2\sqrt{x^2-y} = y - 2x \\ \Leftrightarrow\ & 4(x^2-y) = y^2 - 4xy + 4x^2 \\ \Leftrightarrow\ & y^2 - 4xy + 4y = 0 \\ \Leftrightarrow\ & y = 4x - 4. \end{aligned}$$

Thay vào PT thứ hai ta được

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2-16} &= 2+\sqrt{x-4},\\
\sqrt{x^2-16}-3 &= \sqrt{x-4}-1,\\
\frac{x^2-25}{\sqrt{x^2-16}+3} &= \frac{x-5}{\sqrt{x-4}+1},\\
(x-5)\left(\frac{x+5}{\sqrt{x^2-16}+3}-\frac{1}{\sqrt{x-4}+1}\right) &= 0.
\end{aligned}$$

Vì

$$\frac{x+5}{\sqrt{x^2-16}+3} > \frac{x+5}{\sqrt{x^2}+3} = \frac{x+5}{x+3} > 1 \geq \frac{1}{\sqrt{x-4}+1}$$

nên HPT chỉ có nghiệm duy nhất $(x, y) = (5, 16)$.

Câu 3 *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$P = \sqrt{x^2+y^2+2x+1}+\sqrt{x^2+y^2-2x+1}+\sqrt{3x^2+3y^2-12y+12},\ x, y \in \mathbb{R}.$

Lời giải. Trong mặt phẳng Oxy, xét các điểm

$$A(0;2), B(-1;0), C(1;0), T(0;\sqrt{3}), M(x;y).$$

Dễ kiểm tra thấy rằng T là điểm nằm trong tam giác ABC thỏa mãn

$$\widehat{ATB} = \widehat{CTA} = 150^0,\ \widehat{BTC} = 60^0$$

Suy ra

$$\sqrt{3}\frac{\overrightarrow{TA}}{TA}+\frac{\overrightarrow{TB}}{TB}+\frac{\overrightarrow{TC}}{TC} = \overrightarrow{0}.$$

Ta có

$$\begin{aligned}
P &= \sqrt{x^2+y^2+2x+1} + \sqrt{x^2+y^2-2x+1} + \sqrt{3x^2+3y^2-12y+12} \\
&= \sqrt{3}MA + MB + MC \\
&= \sqrt{3}\frac{MA.TA}{TA} + \frac{MB.TB}{TB} + \frac{MC.TC}{TC} \\
&\geqslant \sqrt{3}\frac{\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{TA}}{TA} + \frac{\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{TB}}{TB} + \frac{\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{TC}}{TC} \\
&= \sqrt{3}\frac{(\overrightarrow{MT}+\overrightarrow{TA}).\overrightarrow{TA}}{TA} + \frac{(\overrightarrow{MT}+\overrightarrow{TB}).\overrightarrow{TB}}{TB} + \frac{(\overrightarrow{MT}+\overrightarrow{TC}).\overrightarrow{TC}}{TC} \\
&= \overrightarrow{MT}\left(\sqrt{3}\frac{\overrightarrow{TA}}{TA} + \frac{\overrightarrow{TB}}{TB} + \frac{\overrightarrow{TC}}{TC}\right) + \sqrt{3}TA + TB + TC \\
&= \sqrt{3}TA + TB + TC \\
&= 1 + 2\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $1+2\sqrt{3}$ đạt khi $M \equiv T$ hay $x = 0$ và $y = \sqrt{3}$.

Câu 4 *Cho dãy số* $(a_n)_{n \geqslant 1}$ *thỏa mãn*

$$a_1 = 1 \text{ và } a_{n+1} = \sqrt{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}; \;\; n \geqslant 2.$$

Tính

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}.$$

Lời giải. Dễ chứng minh được (a_n) là dãy dương, đơn điệu tăng và $a_n \to +\infty$. Từ giả thiết ta có $a_{n+1}^2 = a_n^2 + a_n$, do đó

$$\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^2 = 1 + \frac{1}{a_n} \to 1 \text{ khi } n \to \infty.$$

Ta suy ra được $a_{n+1}/a_n \to 1$. Mặt khác, $a_{n-1}^2 - a_n^2 = a_n$ nên

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n}{a_{n+1} + a_n} = \frac{1}{\frac{a_{n+1}}{a_n} + 1} \to \frac{1}{2}.$$

Áp dụng định lý Stolz,

$$\lim \frac{a_n}{n} = \lim(a_{n+1} - a_n) = \frac{1}{2}.$$

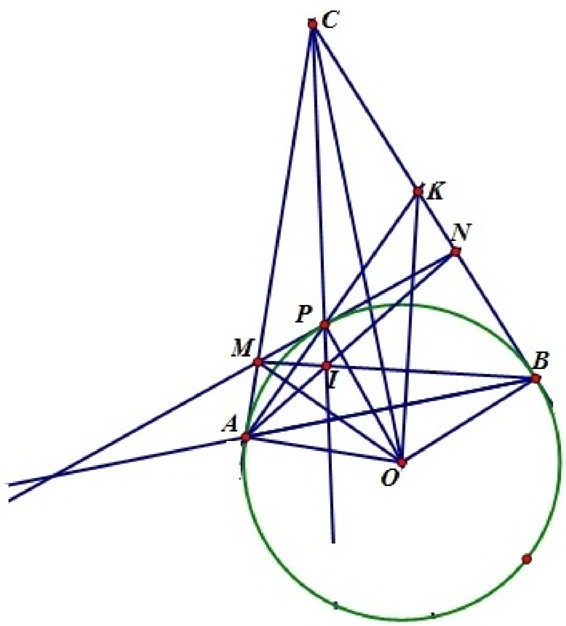
Câu 5 *Cho AB là dây cung cố định của đường tròn (O). Tiếp tuyến tại A, B của (O) cắt nhau tại C. P là điểm trên cung nhỏ AB (P khác điểm chính giữa của cung nhỏ AB). Tiếp tuyến tại P của (O) cắt hai đường thẳng CA, CB tương ứng tại M, N; I là giao điểm của MB và NA.*

a) Chứng minh ba điểm C, P, I thẳng hàng.

b) Gọi K là giao điểm của AP với BC. Chứng minh rằng OK vuông góc với BM.

c) d là đường thẳng qua O vuông góc với CP. Chứng minh ba đường thẳng MN, AB, d đồng quy.

Lời giải.



a) Ta có: $CA = CB, MA = MP, NB = NP$ do đó

$$\frac{AM}{AC} \times \frac{BC}{BN} \times \frac{PN}{PM} = 1.$$

Áp dụng định lý Ceva cho tam giác CMN với ba đường thẳng NA, MB, CP suy ra chúng đồng quy tại I, hay ba điểm C, P, I thẳng hàng.

b) Ta chứng minh được kết quả sau: *"Trong một tứ giác, hai đường chéo vuông góc với nhau khi và chỉ khi tổng bình phương các cạnh đối bằng nhau"*

Áp dụng tính chất trên để chứng minh OK vuông góc với BM ta cần chứng minh:

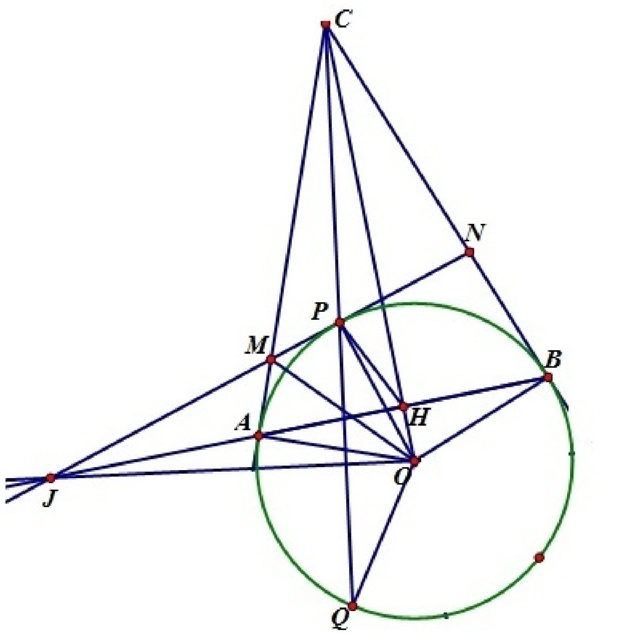
$$OM^2 + BK^2 = MK^2 + OB^2.$$

Ta xét:

$$\begin{aligned} OM^2 + BK^2 - MK^2 - OB^2 &= OA^2 + AM^2 + (OK^2 - OB^2) - MK^2 - OB^2 \\ &= AM^2 + OK^2 - OA^2 - MK^2 (OA = OB) \\ &= 0 (OM \perp AK). \end{aligned}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

c)



Gọi J là giao điểm của d với đường thẳng AB. Ta cần chứng minh JP là tiếp tuyến của đường tròn (O). Gọi Q là giao điểm thứ hai của CP với (O); H là giao điểm của CO với AB. Ta có: $CP.CQ = CA^2 = CH.CO$, suy ra tứ giác $PQOH$ nội tiếp, do đó

$$\angle CQO = \angle CHP.$$

Tam giác OPQ cân tại O nên

$$\angle CQO = \angle QPO.$$

Suy ra

$$\angle QPO = \angle CHP.$$

Ta có:

$$\angle JOP + \angle QPO = \angle CHP + \angle JOP = 90^0 = \angle CHP + \angle JHP.$$

Suy ra $\angle JOP = \angle JHP$, hay tứ giác $JPHO$ nội tiếp. Từ đó, suy ra

$$\angle JPO = \angle JHO = 90^0,$$

hay IP là tiếp tuyến của (O). Vậy ta có điều phải chứng minh.

Câu 6 *Cho dãy hữu hạn các số tự nhiên $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ có tính chất sau đây: với mỗi $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ thì a_i là số các số hạng nhận giá trị bằng i trong dãy trên (chẳng hạn, dãy gồm 4 số hạng là $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 1, a_3 = 0$). Chứng minh rằng khi $n \geqslant 7$ thì có duy nhất dãy gồm n số hạng thỏa mãn tính chất trên là*

$$n-4, 2, 1, 0, \ldots, 0, 1, 0, 0, 0.$$

Lời giải. Đầu tiên ta chứng minh rằng $a_0+a_1+\cdots+a_{n-1} = n$. Thật vậy, theo định nghĩa của a_i thì $a_0+a_1+\cdots+a_{n-1}$ chính là số phần tử của dãy $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$, và giá trị này bằng n.

Vì a_0 là số các số hạng bằng 0, nên ta suy ra rằng $n-a_0$ là số các số hạng khác 0 trong dãy trên. Tuy nhiên, $a_0 \neq 0$ vì nếu ngược lại, $a_0 = 0$ thì mâu thuẫn. Khi đó, ngoài a_0, còn lại có $n-a_0-1$ số hạng khác 0. Lại vì $a_0+a_1+\cdots+a_{n-1} = n$ nên tổng của $n-a_0-1$ số hạng khác 0, không bao gồm a_0, bằng $n-a_0$. Do vậy, trong $n-a_0-1$ số hạng này, có $n-a_0-2$ số hạng bằng 1 và có đúng một số hạng bằng 2 (vì tất cả đều là số tự nhiên dương).

Nếu $a_0 = 1$ thì $a_1 = n-a_0-2+1 = n-2$, $a_2 = 1$, $a_{n-2} = 1$, điều này dẫn đến $a_0+a_1+a_2+a_{n-2} = n+1 > n$: mâu thuẫn. Do đó, $a_0 \neq 1$. Lập luận tương tự ta cũng có $a_0 \neq 2$, vì vậy $a_0 \geqslant 3$.

Giả sử $a_0 = k$. Ta suy ra $a_1 = n-k-2, a_2 = 1, a_{n-k-2} = 1$. Điều này kéo theo $n-k-2 = a_1 = a_2 + a_{n-k-2} = 1+1$, do đó $k = n-4 = a_0$. Từ đây suy ra $a_1 = 2, a_2 = 1$, $a_{n-4} = 1$. Vì $a_0 \geqslant 3$ nên $n \geqslant 7$.

Chú ý: Thí sinh làm theo cách khác nếu đúng vẫn cho điểm tối đa theo từng bài.